

# **Pratique de la réduction de Jordan**

**Gherabi Hafsia**

10 juin 2018

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Autour de la diagonalisation</b>	<b>3</b>
1.1 Étude du problème . . . . .	4
1.2 Condition suffisante de diagonalisabilité . . . . .	7
1.3 Trigonalisation . . . . .	10
1.4 Polynômes annulateurs . . . . .	12
1.5 Polynôme minimal . . . . .	13
1.5.1 Théorème des noyaux . . . . .	14
1.5.2 Réduction en blocs triangulaires . . . . .	15
1.6 Décomposition de Dunford . . . . .	16
<b>2 Réduction de Jordan et tableaux de Young</b>	<b>17</b>
2.1 La réduction de Jordan . . . . .	18
2.1.1 Réduction de Jordan pour $f \in \text{End}_k(E)$ nilpotent . . . . .	19
2.2 Tableaux de Young . . . . .	23
2.2.1 Lire un tableau de Young . . . . .	26
2.3 Étude du cas particulier des matrices nilpotentes . . . . .	27
2.3.1 Suite des noyaux itérés . . . . .	28
2.3.2 Propriétés utiles des $Y(A)$ . . . . .	31
2.4 Cas général de la réduction de Jordan . . . . .	31
2.5 Étude de la relation de similitude . . . . .	32
2.5.1 Théorème de Jordan . . . . .	32
2.5.2 Étude des classes d'équivalence . . . . .	33
2.6 Pratique de la réduction de Jordan . . . . .	34
2.7 Dimensions des orbites : . . . . .	37
2.7.1 Pratique de la réduite de Jordan dans les matrices nilpotentes : . . . . .	38
<b>Conclusion</b>	<b>49</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>50</b>

# Introduction

Soit  $k$  un corps et  $E$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie. Un moyen de calculer plus facilement avec une application linéaire  $f : E \rightarrow E$  est de trouver une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  ait une forme simple : diagonale si possible, ou triangulaire. Cela s'appelle diagonaliser, triangulariser (on dit aussi trigonaliser), ou plus généralement réduire l'endomorphisme  $f$ . On dit aussi qu'on effectue une diagonalisation, une triangulation, une réduction. On dit de même qu'on diagonalise, triangularise, réduit une matrice  $A$  quand on diagonalise, triangularise, réduit l'endomorphisme associé à  $A$  dans la base canonique de  $k^n$ . Si on peut diagonaliser  $f$  ou  $A$  on dit que  $f$  est diagonalisable ou que  $A$  est diagonalisable. Cette possibilité dépend du corps  $k$ .

La théorie de Jordan permet d'arriver à ce que l'on peut considérer la dernière réduction, aboutissant ainsi à une classification des matrices à la relation d'équivalence près “ $A$  est semblable à  $B$ ” (ou si l'on veut : “ $A$  et  $B$  représentent le même endomorphisme”).

Plus précisément le problème est le suivant. Si deux matrices sont semblables alors elles ont la même trace, le même déterminant et plus généralement, les mêmes valeurs propres. En d'autres termes, si deux matrices ont, par exemple, une trace différente (ce qui est très facile à vérifier), alors elles ne représentent pas le même endomorphisme. Il est clair cependant que le spectre n'est pas le seul invariant de la classe des matrices qui représentent le même endomorphisme : le rang, par exemple, est un autre invariant. Mais le rang et le spectre eux-mêmes ne suffisent pas à caractériser les matrices semblables.

Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ont même rang et même spectre et pourtant elles ne sont pas semblables (n'existe pas de matrice inversible  $P$  telle que  $AP = PB$ ).

La question se pose d'une manière naturelle de savoir s'il existe un système complet d'invariants, c'est-à-dire si l'on peut associer à chaque matrice  $A$  un ensemble fini  $\mathcal{S}_A$  de scalaires (tels que le spectre, le rang, etc) tel que si pour deux matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(k)$  on a  $\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_B$ , alors  $A$  et  $B$  sont semblables, c'est-à-dire elles représentent le même endomorphisme en des bases différentes. La réponse est donnée par le théorème de Jordan que nous allons expliquer dans ce mémoire est réparti en deux chapitres.

Dans le premier chapitre on s'intéresse à la diagonalisation des endomorphismes : la clé de la diagonalisation est la notion de vecteurs propres, valeurs propres, polynôme caractéristique. Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité.

Dans le second chapitre, on s'intéresse à la réduite de Jordan (le cas où la matrice de l'endomorphisme n'est pas diagonalisable). On va voir les liens intimes entre la réduction de Jordan, les tableaux de Young et la notion de similitude entre les matrices.

# Chapitre 1

## Autour de la diagonalisation

Soit  $f$  l'endomorphisme  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  défini par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

par rapport à la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ .

En considérant la base  $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  définie par :

$$v_1 = (1, 1, 1)$$

$$v_2 = (1, 3, 2)$$

$$v_3 = (1, 2, 1)$$

la matrice  $A' = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$  est :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si on pose :

$$P = \mathcal{M}(id, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

on a :

$$P^{-1} = \mathcal{M}(id, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Les relations entre  $A$  et  $A'$  sont données par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) & \xrightarrow{f, A} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}) \\ id, P \uparrow & & \downarrow id, P^{-1} \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') & \xrightarrow{f, A'} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}') \end{array}$$

Ce sont :

$$A' = P^{-1}AP$$

$$A = PA'P^{-1}$$

À quelles conditions une base telle que  $\mathcal{B}'$ , par rapport à laquelle la matrice de l'application linéaire a une forme simple, existe-t-elle? Comment peut-on la trouver? Que peut-on faire si elle n'existe pas? Ce sont les questions auxquelles nous allons répondre, partiellement, dans ce chapitre.

## 1.1 Étude du problème

Soient donc  $E$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme de  $E$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = (a_{ij})$ .

On cherche, si c'est possible, une base  $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$  de  $E$  telle que la matrice  $A' = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$  soit diagonale :

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Cela implique que, pour  $1 \leq i \leq n$ , les vecteurs  $v_i$  vérifient :

$$f(v_i) = \lambda_i v_i,$$

ce qui s'écrit encore :

$$(f - \lambda_i I)(v_i) = 0.$$

Autrement dit,  $v_i$  est un vecteur non nul de  $\ker(f - \lambda_i I)$  et  $f - \lambda_i I$  n'est pas injective.

Nous venons de voir, une manière de caractériser un endomorphisme non injectif : c'est un endomorphisme dont le déterminant est nul. On a donc  $\det(f - \lambda_i I) = 0$  pour  $1 \leq i \leq n$ , ce signifie que  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont solutions de l'équation :

$$\det(f - \lambda I) = 0,$$

ce qui s'écrit, en utilisant la base  $\mathcal{B}$  :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est une équation polynomiale à coefficients dans  $k$  de degré  $n$  en  $\lambda$  (ce que montre une récurrence évidente sur  $n$ ). C'est elle qui va permettre de construire, quand c'est possible, la base  $\mathcal{B}'$ . l'étude précédente conduit à poser les définitions suivantes.

**Définition 1.1** (Valeur propre)

Soient  $E$  un  $k$ -espace vectoriel (e.v) de dimension finie  $n$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $E$ ,  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme de  $E$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et

$$x \rightarrow f(x)$$

$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = (a_{ij})$ . On appelle valeur propre de  $f$  (ou de  $A$ ) tout élément  $\lambda$  de  $k$  tel que  $\det(f - \lambda \text{id}_E) = 0$  [ou  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ ].

**Définition 1.2** (Vecteur propre)

On appelle vecteur propre de  $f$  (ou de  $A$ ) associé à la valeur propre  $\lambda$  tout vecteur non nul de  $\ker(f - \lambda \text{id}_E)$  [ou  $\ker(A - \lambda I_n)$ ] sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Remarque 1.1**

$$(f - \lambda \text{id}_E)(x) = 0 \Rightarrow f(x) - \lambda x = 0 \Rightarrow f(x) = \lambda x \Rightarrow f(v) = \lambda v \text{ ou } Av = \lambda v.$$

Le spectre d'un endomorphisme  $f$  de  $E$  (d'une matrice  $A$ ) est l'ensemble des valeurs propres :  $\text{spec}(A) = \{\lambda_i\}_i$ .

**Définition 1.3** (Espace propre)

On appelle espace propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$  le sous-espace vectoriel  $E(\lambda)$ . i.e., le sous espace formé par les vecteurs propres de  $E$  tel que  $f(v) = \lambda v$ .

**Définition 1.4** (Polynôme caractéristique)

On appelle polynôme caractéristique de  $f$  (ou de  $A$ ) le polynôme :

$$P(\lambda) = \det(f - \lambda \text{id}_E) = \det(A - \lambda I_n), \text{ c'est un polynôme de degré } n \text{ en } k.$$

**Remarque 1.2**

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique  $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}(f)}$ , il existe  $P$  matrice de passage tel que  $A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$  et  $A' = P^{-1}AP$ ,  $P_A(\lambda) = P_{A'}(\lambda)$ ,  $\det A' = \det(P^{-1}) \times \det(A)$  et  $\det P = \det A$ .

$$P_{A'}(\lambda) = \det(A' - \lambda I_n) = \det(P^{-1}AP - P^{-1})I_n f = P_A(\lambda).$$

**Remarque 1.3**

Si  $A \in \mathcal{M}_n(k)$ .

$$\text{Alors, } P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(A) \lambda^{n-1} + \dots + \det(A).$$

**Remarque 1.4**

Si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2) = \{0\}$ ,  $v \in E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2) \Rightarrow v \in E(\lambda_1)$  et  $v \in E(\lambda_2)$   
 $f(v) = \lambda_1 v = \lambda_2 v \Rightarrow \lambda_1 v - \lambda_2 v = 0 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)v = 0 \Rightarrow v = 0$  (car  $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ ).

**Proposition 1.1**

Soit  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme de  $E$ , on suppose que le polynôme caractéristique  $P(\lambda)$  a  $k$  racines distinctes et on note  $E(\lambda_1), \dots, E(\lambda_k)$ . Les sous-espaces propres associés si  $E = E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_k)$ , alors  $f$  (ou  $A$ ) est diagonalisable.



**Preuve.**

Pour  $i = 1, \dots, k$ , choisissons une base  $\mathcal{B}_i$  de  $E(\lambda_i)$ . La base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  réunion des  $\mathcal{B}_i$  ( $\mathcal{B}' = \bigsqcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$ ) est formée de vecteurs propres de  $f$  associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  donc la matrice  $D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$  est diagonale .i.e.,

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad \cdot \quad \blacksquare$$

## 1.2 Condition suffisante de diagonalisabilité

**Proposition 1.2**

*Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ , si le polynôme caractéristique de  $A$  a  $n$  racines distinctes deux à deux dans  $k$ , alors  $A$  est diagonalisable.*

**Preuve.**

$P(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$ , soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les  $n$  racines distinctes du polynôme  $P(\lambda)$  et soient  $v_1, \dots, v_n$  les vecteurs propres associés à ces racines. i.e.,

$$\begin{cases} f(v_1) = \lambda_1 v_1 \\ \vdots \\ f(v_n) = \lambda_n v_n \end{cases} \Rightarrow f(v_i) = \lambda_i v_i, \forall i = 1, \dots, n$$

Il suffit de montrer que  $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$  est une base de  $E$  pour cela montrons par récurrence sur  $k$  que  $(v_1, \dots, v_k)$  est une famille libre de  $E$ .

C'est vrai pour  $k = 1$ , on suppose que la propriété est vraie pour  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) et montrons que  $(v_1, \dots, v_{k+1})$  est une famille libre de  $E$  si on à l'écriture :

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0 \dots \dots (1)$$

$$\text{on a : } f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1}) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \dots + \alpha_k f(v_k) + \alpha_{k+1} f(v_{k+1}) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0 \dots \dots (2)$$

$$\text{de (2) - } \lambda_{k+1}(1) : -\lambda_{k+1} \alpha_1 v_1 - \lambda_{k+1} \alpha_2 v_2 - \dots - \lambda_{k+1} \alpha_k v_k - \lambda_{k+1} \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_{k+1})\alpha_1 v_1 + (\lambda_2 - \lambda_{k+1})\alpha_2 v_2 + \dots + (\lambda_k - \lambda_{k+1})\alpha_k v_k = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_{k+1})\alpha_1 = (\lambda_2 - \lambda_{k+1})\alpha_2 = \dots = (\lambda_k - \lambda_{k+1})\alpha_k = 0$$

par hypothèse de récurrence par suite  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k$  (les  $\lambda_i$  son deux à deux distinctes) ce qui reporté dans (1), donc  $\alpha_{k+1}v_{k+1} = 0 \Rightarrow \alpha_{k+1} = 0$ . D'où  $(v_1, \dots, v_{k+1})$  libre. Par conséquent,  $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$  est une famille libre de  $n$  éléments de  $E$ , c'est-à-dire la matrice  $A$  est diagonalisable, donc une base de  $E$ . ■

### Proposition 1.3

Soit  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme et soit  $\lambda_1$  une valeur propre de  $f$  dans  $k$ , si  $\dim E(\lambda_1) = r$ , alors  $\lambda_1$  est une racine d'ordre  $m \geq 1$  de  $P(\lambda)$ . i.e.,  $\dim E(\lambda_1) \leq m$ .

#### Preuve.

Choisissons une base  $(e_1, \dots, e_r)$  de  $E(\lambda_1)$  et complétons la en une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ .

La matrice  $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$  est de la forme : 
$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & A_1 \\ 0 & \dots & \lambda_1 & \\ \hline & 0 & & A_2 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) &= \left| \begin{array}{ccc|c} \lambda_1 - \lambda & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & A_1 \\ 0 & \dots & \lambda_1 - \lambda & \\ \hline & 0 & & A_2 - \lambda I_{n-r} \end{array} \right| \\ &= (\lambda_1 - \lambda)^r \det(A_2 - \lambda I_{n-r}). \end{aligned}$$

Il est possible que  $\lambda_1$  soit aussi racine de  $\det(A_2 - \lambda I_{n-r})$ . D'où l'ordre  $m \geq r = \dim E(\lambda_1)$ . ■

### Corollaire 1.1

1. Si  $P(\lambda)$  n'est pas scindé dans  $k$ , alors  $f$  n'est pas diagonalisable.
2. S'il existe une valeur propre  $\lambda_i$  racine de  $P(\lambda)$  telle que la dimension de l'espace propre associé  $\dim E(\lambda_i) < m_i$  l'ordre de  $\lambda_i$ , alors  $f$  n'est pas diagonalisable.

#### Preuve.

Le raisonnement est le même dans les deux cas. Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  les racines de  $P(\lambda)$  dans  $k$  et  $m_1, \dots, m_k$  leurs ordres de multiplicité respectifs. i.e.,  $P(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ . La proposition précédente montre que

$\dim E(\lambda_i) \leq m_i, \forall 1 \leq i \leq k$ . On a donc :  $\sum_{i=1}^k \dim E(\lambda_i) \leq \sum_{i=1}^k m_i \leq n$ . Dans les deux cas, l'une des inégalités est stricte.

Par conséquent, on ne peut trouver de base de  $E$  formée de vecteurs propres puisque les sous-espace propres de  $E$  ne peuvent engendrer  $E$ . ■

### Remarque 1.5

Le corollaire précédent donne deux conditions nécessaires de diagonalisation. La proposition suivante montre que ce sont des conditions suffisantes pour pouvoir diagonaliser.

### Proposition 1.4

*Soient  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme. Une conditions nécessaire et suffisante pour que  $f$  soit diagonalisable est que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

1. *Le polynôme caractéristique  $P(\lambda)$  de  $f$  est scindé dans  $k[\lambda]$ .*
2. *Si on note  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  les racines distinctes de  $P(\lambda)$  et  $m_1, \dots, m_k$  leurs ordres de multiplicité respectifs, alors  $\dim E(\lambda_i) = m_i$ , pour  $1 \leq i \leq k$ .*

### Preuve.

Pour montrer que ces conditions sont suffisantes, on va montrer par récurrence que les sous-espaces propres  $E(\lambda_i)$ ,  $1 \leq i \leq j$  sont en somme directe pour  $1 \leq j \leq k$ .  $E = E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_k)$ . C'est vrai pour  $j = 1$ , supposons que la propriété soit vraie pour un entier  $j$ ,  $1 \leq j \leq k$  et montrons qu'elle est vraie pour  $j + 1$ , notons

$$S_j = \bigoplus_{i=1}^j E(\lambda_i).$$

$$\text{soit } v \in S_j \cap E(\lambda_{j+1}) \Rightarrow \begin{cases} v = v_1 + \dots + v_j \dots \dots (1) \\ \text{et} \\ f(v) = \lambda_{j+1} v \end{cases}$$

$$\text{de (1)} \Rightarrow f(v) = f(v_1) + \dots + f(v_j) \Rightarrow \lambda_{j+1} v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_j v_j \dots \dots (2)$$

$$\text{de (2)} - \lambda_{j+1} (1) \Rightarrow 0 = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{j+1})v_1}_{\in E(\lambda_1)} + \dots + \underbrace{(\lambda_j - \lambda_{j+1})v_j}_{\in E(\lambda_j)}, \text{ d'où } v = 0.$$

$E = E_1 \oplus E_2, \forall v \in E \exists! v_1 \in E_1 \text{ et } \exists! v_2 \in E_2, 0 = v = v_1 + v_2$ . Par suite  $v_1 = \dots = v_j = 0$ . Par conséquence les  $E(\lambda_i)$ ,  $1 \leq i \leq k$  sont en somme dérècte

dans  $E$  comme  $\sum_{i=1}^n \dim E(\lambda_i) = \sum_{i=1}^n m_i = n$ . On voit que  $E = \bigoplus_{i=1}^k E(\lambda_i)$  d'où  $f$  est diagonalisable.  $D = \left( \begin{array}{ccc} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{matrix}} \end{array} \right) \cdot \blacksquare$

### 1.3 Trigonalisation

Que faire quand on ne peut diagonaliser un endomorphisme  $f$ ? Une réduction qui paraît intéressante est la réduction à la forme triangulaire. Si cette réduction est possible, notons  $A' = (a_{ij})$  la matrice triangulaire représentant  $f$ . Le polynôme caractéristique de  $f$  est  $P(\lambda) = \det(A' - \lambda I) = (a_{11} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$ . Il est donc scindé. Nous allons montrer que cette condition nécessaire pour pouvoir trianguler est également suffisante.

Remarquons avant que les problèmes de réduction à des formes triangulaires supérieures et inférieures sont équivalents : si on a trouvé une base  $(v_1, \dots, v_n)$  par rapport à laquelle la matrice de  $f$  est triangulaire supérieure, alors la matrice de  $f$  est triangulaire inférieure par rapport à la base  $(v_n, \dots, v_1)$ .

#### Proposition 1.5

*Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme de  $E$ . On suppose que le polynôme caractéristique de  $f$  est scindé dans  $K[X]$ . Alors  $f$  est triangularisable. En particulier, si  $K = \mathbb{C}$ , tout endomorphisme de  $E$  est triangularisable.*

#### Proposition 1.6

*$f : E \rightarrow F$ , on suppose  $P(\lambda)$  de  $f$  est scindé dans  $k[\lambda]$ . Alors  $f$  est trigonalisable.*

**Preuve.**

Raisonnons par récurrence sur la dimension de  $E$  le résultat vrai pour les espaces de dimension 1. Supposons le résultat vrai pour les espaces de dimension  $\leq n-1$  et soit  $E$  de dimension  $n$ . Soit  $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$  dans  $k[\lambda]$  ( $k = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Les valeurs propres  $\lambda_i$  ne sont pas nécessairement distinctes. Notons  $v_1$  un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_1$ . D'après le théorème de la base incomplète, il existe une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  de la forme  $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, e_n)$ . Par rapport à cette base, la matrice de  $f$  est

$$\text{de la forme : } A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \text{ La famille } \mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$$

est une base du sous-espace  $F = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$  de  $E$ . Notons  $g : F \rightarrow F$  l'endomorphisme défini par :

$$x \rightarrow g(x)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \times \det(A - \lambda I_{n-1})$ . i.e.,  $P(\lambda)$  est scindé et comme  $\dim F = n-1$ , il existe une base  $\mathcal{B}_2 = (v_1, \dots, v_n)$  de  $F$  telle que  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(g)$  soit triangulaire supérieure.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'=(v_1, \dots, v_n)}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} = T = p^{-1} A p. \quad \blacksquare$$

**Remarque 1.6**

1. Si  $A$  est trigonalisable, la matrice  $T = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$  a sur la diagonale les valeurs propre de  $A$ .
2. Toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable.

**Corollaire 1.2**

$$\text{tr}(A) = \sum_i \lambda_i, \det(A) = \prod_i \lambda_i.$$

## 1.4 Polynômes annulateurs

Soient  $E$  un  $k$ -espace vectoriel et  $R \in k[\lambda]$  :

$R(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda^1 + a_0 \lambda^0$ . Si  $f \in \text{End}_k(E)$ , on note  $R(f)$  l'endomorphisme de  $E$  définie par :  $R(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda^1 + a_0 \lambda^0$ . Ou bien, si  $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(k)$ , alors :  $R(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A^1 + a_0 I_n$ .  $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$ .

### Remarque 1.7

On a  $P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$ .

### Définition 1.5

Soit  $f \in \text{End}_k(E)$  un polynôme  $R(\lambda) \in \mathbb{k}[\lambda]$  est dit annulateur de  $f$ . Si  $R(f) = 0$  ( $\text{End nul}$ ) ou  $R(A) = 0$  (matrice nulle).

### Théorème 1.1 (Cayley Hamilton)

Soit  $f \in \text{End}_k(E)$  et  $P(\lambda)$  le polynôme caractéristique de  $f$  :  $P(f) = 0$  [ou  $P(A) = 0$ ].

### Preuve.

Supposons  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$  dans ce cas  $f$  est trigonalisable. Soit  $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$  une base

$$\text{de } E \text{ telle que } T = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & \lambda_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix}, P(\lambda) = \det(T - \lambda I_n).$$

On a  $P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$  et  $P(f) = (\lambda_1 \text{id} - f) \circ \dots \circ (\lambda_n \text{id} - f)$ . On a :

$$P(f)(v_1) = (\lambda_1 \text{id} - f) \circ \dots \circ \underbrace{(\lambda_n \text{id} - f)}_{=0}(v_1) = 0$$

$$P(f)(v_2) = (\lambda_3 \text{id} - f) \circ \dots \circ (\lambda_n \text{id} - f) \circ (\lambda_1 \text{id} - f) \circ (\lambda_2 \text{id} - f)(v_2)$$

$$P(f)(v_2) = (\lambda_3 \text{id} - f) \circ \dots \circ (\lambda_n \text{id} - f) \circ (\lambda_1 \text{id} - f) \circ \dots \circ \underbrace{(\lambda_1 \text{id} - f)(-a_{12} v_1)}_{=0} = 0.$$

Et par récurrence on trouve :  $P(f)(v_i) = 0, \forall i = \overline{1, n}$ . D'où  $P(f) = 0$ . ■

### Proposition 1.7

Soit  $S(\lambda)$  un polynôme annulateur de  $f$  [i.e.,  $S(f) = 0$ ]. Toute valeur propre de  $f$  (de  $A$ ) est racine de  $S(\lambda)$  [i.e.,  $S(\lambda) = 0$ ].

**Preuve.**

Si  $\lambda$  est une valeur propre  $f(v) = \lambda v$ . Or  $S(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$   
 $S(f) = a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \dots + a_1 f + a_0 \text{id} = 0$   
Donc  $a_n f^n(v) + a_{n-1} f^{n-1}(v) + \dots + a_1 \underbrace{f(v)}_{=\lambda v} + a_0 \underbrace{\text{id}(v)}_{=v} = 0$   
 $\Rightarrow a_n \lambda^n v + a_{n-1} \lambda^{n-1} v + \dots + a_1 \lambda v + a_0 v = 0$   
 $\underbrace{(a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0)}_{S(\lambda)} \underbrace{v}_{\neq 0} = 0$ . Par suite  $[V \neq 0] \Rightarrow S(\lambda) = 0$ . i.e.,  $\lambda$  est une racine de  $S(\lambda)$ . ■

### Proposition 1.8

Si  $P(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$ . Alors, si  $f$  est diagonalisable, le polynôme :  $Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_p)$ . i.e., annule  $f$  [i.e.,  $Q(f) = 0$ ].

**Preuve.**

Si  $f$  est diagonalisable, il existe une base  $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$  formée de vecteurs propres. Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont les valeurs propres, pour tout  $v_i \in \mathcal{B}'$   $i = \overline{1, n}$ , il existe au moins  $\lambda_j$ ,  $1 \leq j \leq p$  telle que  $f(v_i) = \lambda_j v_i$  i.e.,  $(f - \lambda_j \text{id})(v_i) = 0$   
 $Q(f) = (f - \lambda_1 \text{id}) \circ \dots \circ (f - \lambda_p \text{id})$   
 $Q(f) = [(f - \lambda_1 \text{id}) \circ \dots \circ (f - \lambda_j \text{id}) \circ \dots \circ (f - \lambda_p \text{id})](v_i)$   
 $= (f - \lambda_1 \text{id}) \circ \dots \circ (f - \lambda_j \text{id})(v_i) = 0$  ■

## 1.5 Polynôme minimal

### Définition 1.6

On appelle polynôme minimal de  $f$  le polynôme normalisé annulateur de  $f$  de degré le plus petit :  $Q(f) = 0$ .

### Remarque 1.8

Si  $S(\lambda)$  est un multiple de  $Q(\lambda)$ , alors :  
 $S(\lambda) = Q(\lambda) \times T(\lambda)$   
 $S(f) = Q(f) \circ T(f) = 0$   
i.e.,  $S(\lambda)$  est un polynôme annulateur.

**Proposition 1.9**

*Les polynômes annulateurs de  $f$  sont les polynômes de type :*

$$S(\lambda) = Q(\lambda) \times T(\lambda)$$

$$\text{si } S(\lambda) = Q(\lambda) \times T(\lambda) + R(\lambda)$$

$S(f) = R(f) = 0$ ,  $R(f) = 0$ . i.e.,  $R$  est annulateur et comme  $d^\circ R(\lambda) < d^\circ Q(\lambda)$  condition, ce qui prouve que  $R(\lambda) = 0$ .

**Remarque 1.9**

$Q(\lambda)/P(\lambda)$  où bien  $P(\lambda) = Q(\lambda) \times T(\lambda)$ .

**Proposition 1.10**

*Les racines de  $Q(\lambda)$  sont exactement les racines de  $P(\lambda)$ . i.e., les valeurs propres.*

*Mais avec une multiplicité en générale différents. Si :*

$$P(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}, \lambda_i \neq \lambda_j.$$

Alors  $Q(\lambda) = P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{\alpha_p}$  avec  $1 \leq \alpha_i \leq m_i, i = \overline{1, n}$ .

**Preuve.**

On sait que  $P(\lambda) = Q(\lambda) \times T(\lambda)$ , donc si  $\lambda$  est racine de  $Q(\lambda)$ , alors elle est racine de  $P(\lambda)$ . Réciproquement, soit  $\lambda$  racine de  $P(\lambda)$ . i.e.,  $\lambda$  valeur propre, alors  $\lambda$  est racine de  $Q(\lambda)$ , parce que  $Q(\lambda)$  annul. ■

**Exemple 1.1**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, P(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$$

Alors  $Q(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$  ou bien  $Q(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$

or  $(A - I_3)(A + 2I_3) = 0_3$ . i.e.,  $Q(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$ .

**1.5.1 Théorème des noyaux**

Soient  $E$  un  $K$ -espace vectoriel et  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme de  $E$ .

1. On suppose qu'il existe un polynôme  $P$  de  $k[\lambda]$  de la forme  $P = ST$  avec  $S, T$  polynômes de  $k[\lambda]$  premiers entre eux, tel que  $P(f) = 0$ . Alors

$$E = \ker S(f) \oplus \ker T(f).$$



2. On suppose qu'il existe un polynôme  $P$  de  $k[\lambda]$  de la forme  $P = P_1 \times \dots \times P_k$  avec  $P_1, \dots, P_k$  polynômes de  $k[\lambda]$  premiers entre eux deux à deux, tel que  $P(f) = 0$ . Alors  $E = \ker P_1(f) \oplus \dots \oplus \ker P_k(f)$ .

**Preuve.**

$$\begin{aligned} \ker S(f) \cap \ker T(f) &= \{0\}. \text{ Soit } v \in \ker S(f) \cap \ker T(f) \\ S(f)(v) &= 0 \text{ et } T(f)(v) = 0. \text{ Or } P(\lambda) = S(\lambda) \times T(\lambda) \Rightarrow P(f) = S(f) \circ T(f), \text{ comme} \\ S(\lambda) \wedge T(\lambda) &= 1, \text{ d'après le théorème de Bésout il existe } S_1(\lambda), T_1(\lambda) \\ S_1(\lambda) \times S(\lambda) &+ T_1(\lambda) \times T(\lambda) = 1 \\ S_1(f) \circ S(f) &+ T_1(f) \circ T(f) = Id \\ v = Id(v) &= S_1(f) \underbrace{[S(f)(v)]}_{=0} + T_1(f) \underbrace{[T(f)(v)]}_{=0} \Rightarrow v = 0 \\ \text{Soit } v \in E : v &= Id(v) \stackrel{=0}{=} \underbrace{S_1(f) \circ S(f)(v)}_{v_2} + \underbrace{T_1(f) \circ T(f)(v)}_{v_1} \\ v_1 \in \ker S(f). \text{ i.e., } S(f)(v_1) &= S(f) [T_1(f) \circ T(f)(v)] = T_1(f) \circ \underbrace{S(f) \circ T(f)(v)}_{P(f)=0} = 0 \\ \text{et de même pour } v_2, v_2 &\in \ker T(f). \blacksquare \end{aligned}$$

### Proposition 1.11

*Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable il faut et il suffit que son polynôme minimal n'ait que des racines simples.*

**Preuve.**

$$\begin{aligned} \text{Si } f \text{ est diagonalisable} &\Rightarrow Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_p). \\ \text{Si } Q(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_p) \\ Q(\lambda) &= P_1 \times \dots \times P_p \text{ avec } P_1, \dots, P_p \in k[\lambda], \text{ premiers entre eux deux à deux, tel que} \\ Q(f) &= 0. \text{ Alors } E = \ker P_1(f) \oplus \dots \oplus \ker P_p(f) = E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_p). \blacksquare \end{aligned}$$

## 1.5.2 Réduction en blocs triangulaires

Espaces caractéristiques.

### Définition 1.7

Soit  $P(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_j$ . On appelle espace caractéristique associé à la valeur propre  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, p}$ . Le sous-espace vectoriel :  $N(\lambda_i) = \ker(f - \lambda_i id)^{m_i}$ .

### Propriété 1.1

1.  $E(\lambda_i) \subset N(\lambda_i)$ .
2.  $\dim N(\lambda_i) = m_i$ .
3.  $f_i = f/N(\lambda_i)$  a pour polynôme caractéristique  $P_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ .

### Théorème 1.2 (Spectral)

$P(f) = (f - \lambda_1 id)^{m_1} \circ \dots \circ (f - \lambda_p id)^{m_p}$ . D'après le théorème de noyau  
 $E = \ker(f - \lambda_1 id)^{m_1} \oplus \dots \oplus \ker(f - \lambda_p id)^{m_p}$ .  
i.e.,  $E = N(\lambda_1) \oplus \dots \oplus N(\lambda_p) = \bigoplus_{i=1}^p N(\lambda_i)$ .  $E$  est somme directe d'espaces caractéristique.

### Théorème 1.3

Il existe une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$ ,  $\mathcal{B}' = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p\}$  où  $\mathcal{B}_i$  est une base de  $N(\lambda_i)$ , telle

$$\text{que } \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & \dots & . \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_1 \end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_p & \dots & . \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_p \end{matrix}} \end{pmatrix} = P^{-1}AP.$$

## 1.6 Décomposition de Dunford

Toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  se décompose d'une manière unique sous la forme  $A = D + N$  où  $D$  diagonalisable et  $N$  est nilpotente et  $DN = ND$ .

## Chapitre 2

# Réduction de Jordan et tableaux de Young

La réduction par blocs triangulaires est, en générale , suffisante pour les applications ; cependant une dernière réduction peut être effectuée à l'intérieur de chaque bloc jusqu'à parvenir à la forme qui, dans un certain sens, est la plus simple possible : la forme de Jordan. Par exemple, soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathcal{M}(f)_{e_i}$$

Cette matrice est sous forme triangulaire. On peut se demander si elle est diagonalisable. On trouve :

$$P_A(X) = -(X - 1)^2(X - 2) \quad \text{et} \quad m_A(X) = (X - 1)(X - 2)$$

$A$  est donc diagonalisable : il existe une base  $\{v_i\}$  telle que

$$\mathcal{M}(f)_{v_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En revanche, soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On a :

$$P_B(X) = -(X-1)^2(X-2) \quad \text{et} \quad m_B(X) = (X-1)^2(X-2);$$

donc  $B$  ne peut pas être réduite à la forme diagonale. Ainsi pour certaines matrices triangulaires une ultérieure réduction est possible, pour d'autre non.

## 2.1 La réduction de Jordan

### Définition 2.1

On appelle bloc de Jordan (matrice de Jordan) de taille  $n$  (d'ordre  $n$ ) une matrice de type :  $J_n(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{pmatrix}$ .

Par exemple :  $J_1(\lambda_1) = (\lambda_1)$ ,  $J_2(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ ,  $J_3(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ ,

$$J_4(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

### Propriété 2.1

Pour  $J_n(\lambda_1)$ . On a  $P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^n = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^n$  et  $Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^n$ ,  $E(\lambda_1) = < U_1 >$ ,  $\dim E(\lambda_1) = 1$ .

### Théorème 2.1 (Jordan)

Soit  $f \in \text{End}_k(E)$ , on suppose que  $P(\lambda)$  est scindé.

**I)** Supposons d'abord que  $f$  n'a qu'une valeur propre et que :  $P(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^n$ ,

$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^\beta$ ,  $\dim E(\lambda_1) = \alpha$ . Il existe une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  telle que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{J^1(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J^\alpha(\lambda_1)} \end{pmatrix} = \tilde{J}_n(\lambda_1).$$

Où les :  $J^k(\lambda_1)$ ,  $i \leq k \leq \alpha$  sont des blocs de Jordan

-L'ordre du plus grand bloc est  $\beta$ .

-Le nombre des bloc est  $\alpha$ .

**II)** Si  $P(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$ . Alors il existe une base  $\mathcal{B}'$  telle que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\tilde{J}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\tilde{J}(\lambda_p)} \end{pmatrix}.$$

### Exemple 2.1

Soit  $A \in \mathcal{M}_5(k)$  avec  $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^5$  et  $Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{3=\beta}$ ,  
 $\dim E(\lambda_1) = 2 = \alpha$  alors, il existe  $\mathcal{B}'$  (base de Jordan) tel que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Si  $\dim E = 5$ ,  $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^5$ ,  $Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{3=\beta}$ ,  $\dim E(\lambda_1) = 3 = \alpha$  donc,

$$\text{il existe } \mathcal{B}' \text{ (base de Jordan) avec } \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & & & 0 \\ & \boxed{\lambda_1} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{matrix}} \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

#### 2.1.1 Réduction de Jordan pour $f \in \text{End}_k(E)$ nilpotent

Soit  $f$  (ou  $A$ ) un endomorphisme nilpotent (matrice nilpotente d'indice  $m$ ). il existe  $m/A^m = 0$  et  $A^{m-1} \neq 0$  [ $f^m = 0$  et  $f^{m-1} \neq 0$ ].

**1<sup>er</sup> cas :** Si  $m = n = \dim E$  :  $A^n = 0$  et  $A^{n-1} \neq 0$  donc, il existe  $v \in E$  /  $f^n(v) = 0$  et  $f^{n-1}(v) \neq 0$ , par conséquent, il existe  $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} v_n & = & v \\ v_{n-1} & = & f^1(v) \\ v_{n-2} & = & f^2(v) \\ \vdots & & \\ v_3 & = & f^{n-3}(v) \\ v_2 & = & f^{n-2}(v) \\ v_1 & = & f^{n-1}(v) \end{array} \right. , \text{ par suite } \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_n(0)$$

$$\text{donc } \left\{ \begin{array}{lcl} f(v_1) & = & f(f^{n-1}(v)) = f^n(v) = 0 \\ f(v_2) & = & f(f^{n-2}(v)) = f^{n-1}(v) = f^{n-1}(v) = v_1 \\ f(v_2) & = & f(f^{n-2}(v)) = f^{n-1}(v) = f^{n-2}(v) = v_2 \\ \vdots & & \\ f(v_{n-1}) & = & f(f(v)) = f^{n-1}(v) = f^2(v) = v_{n-1} \\ f(v_n) & = & f(v) = f^{n-1}(v) = v_{n-1} \end{array} \right.$$

**Exemple 2.2**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A^2 = 0_2 \text{ comme } m = 2 = n = \dim E, \text{ alors } \exists \mathcal{B}' = (v_1, v_2).$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} v_2 = v \\ v_1 = f(v) \end{array} \right. , \text{ tel que } \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = J_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}AP.$$

$$\text{On prend } v = e_1 : \text{ donc } \left\{ \begin{array}{lcl} v_2 & = & e_1 \\ v_1 & = & f(e_1) = -e_1 - e_2 = (-1, -1) \end{array} \right.$$

$$\text{On prend } v = e_2 : \text{ donc } \left\{ \begin{array}{lcl} v_2 & = & e_2 \\ v_1 & = & (1, 1) \end{array} \right.$$

Tableau de Young

On dessine un tableau ( dit tableau de Young ) comme suit :

$$\begin{array}{c} F_1 \\ E(0) \end{array} \begin{array}{|c|} \hline v_2 \\ \hline v_1 \\ \hline \end{array}$$

$$E = \ker A^2 = E(0) \oplus F_1$$

**Exemple 2.3**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}, P(\lambda) = -\lambda^3, A^3 = 0 \text{ et } A^2 \neq 0, \text{ il existe } \mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3),$$

$$\dim E(\lambda_1) = 1 \neq m_1$$

$$\begin{cases} v_3 = v \\ v_2 = f(v) \\ v_1 = f^2(v) \end{cases} \text{ tel que } \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = J_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}AP.$$

On prend  $v = e_2$

$$\begin{cases} v_3 = e_2 \\ v_2 = f(e_2) = Av_3 = (5, 2, 6) \\ v_1 = f(v_2) = Av_2 = (3, 3, 9) \end{cases}$$

On dessine un tableau (dit tableau de Young) comme suit :

Tableau de Young

$$\begin{array}{lll} E = \ker A^3 = \ker A^2 \oplus F_2 & F_2 & \boxed{v_3} \\ \ker A^2 = E(0) \oplus F_1 & F_1 & \boxed{v_2} \\ E(0) = \ker A & E(0) & \boxed{v_1} \end{array}$$

$$v_3 \notin F_2, \text{ i.e., } v_3 \notin \ker A^2 \Rightarrow \ker A \oplus F_1 = E(0) \oplus F_1$$

**2<sup>ème</sup> cas :** Si  $m < n = \dim E$ , alors le polynôme minimal est  $Q(\lambda) = \lambda^m$ , il existe

$\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  on a  $P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n$  (polynôme caractéristique).

$$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, m_1 = n \text{ une seule valeur propre } \begin{cases} P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n \\ Q(\lambda) = \lambda^m \\ \dim E(0) = \alpha \end{cases}$$

où : -Les  $J^k(0)$ ,  $k = 1, \dots, \alpha$  sont des blocs de Jordan.

-L'ordre du plus grand bloc est  $m$ .

-Le nombre des blocs est  $\alpha$ .

**cas où  $A \in M_2(\mathbf{k})$  :**

Soit  $A \in M_2(k)$ , si  $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ ,  $A$  est diagonalisable,  $\exists \mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ ,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP \text{ si } P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2.$$

$$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_1, m_1 = 2.$$

$$\text{Si } \dim E(\lambda_1) = 2 : (A - \lambda_1 I_2) = 0 \Rightarrow A = \lambda_1 I_2 \text{ c'est-à-dire : } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Si  $\dim E(\lambda_1) = 1$ ,  $A$  n'est pas diagonalisable. i.e.,  $Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2 = P(\lambda)$ ,

$$\exists \mathcal{B}' = (v_1, v_2) \begin{cases} v_2 \notin E(\lambda_1) \\ v_1 = (A - \lambda_1 I_2)v_2 \end{cases} \text{ tel que } J_2(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

Tableau de Young

$$E = \ker(A - \lambda_1 I_2)^2 = \underbrace{\ker(A - \lambda_1 I_2)}_{E(\lambda_1)} \oplus F_1$$

$F_1$	$v_2$
$E(\lambda_1)$	$v_1$

**Remarque 2.1**

Si  $A$  est nilpotente :  $tr(A) = 0$  et  $P(\lambda) = (-1)\lambda^n$ .

**cas où  $A \in M_3(\mathbf{k})$  :**

Soit  $A \in M_3(k)$ .

1. Si  $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \Rightarrow A$  est diagonalisable.
2. Si  $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^2$  : alors  $\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \lambda_1, \quad m_1 = 1 \Rightarrow \dim E(\lambda_1) = 1 \\ \lambda = \lambda_2, \quad m_2 = 2 \Rightarrow \dim E(\lambda_2) = 1 \text{ ou } 2 \end{array} \right.$ .

Si  $\dim E(\lambda_2) = 2$ ,  $A$  est diagonalisable. Si  $\dim E(\lambda_2) = 1$ ,  $A$  n'est pas diagonalisable et la réduite de forme : il existe  $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} v_3 \in N(\lambda_2) \setminus E(\lambda_2) \\ v_2 = (A - \lambda_2 I_3)v_3 \\ v_1 \in E(\lambda_1) \end{array} \right.$$

Tableau de Young

$$\ker(A - \lambda_2 I_3) = E(\lambda_2)$$

$F_1$	$v_3$
$E(\lambda_2)$	$v_2$

$$\ker(A - \lambda_2 I_3)^2 = E(\lambda_2) \oplus F_1$$

$$\left( \begin{array}{c|cc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{array} \right) = p^{-1}Ap, \text{ et } Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^2.$$

3. Si  $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^3$ , alors  $\lambda = \lambda_1$ ,  $m_1 = 3$ . Si  $\dim E(\lambda_1) = 3$ ,  $(A - \lambda_1 I_3) = 0$  :

$$A = \lambda_1 I_3. \text{ Si } \dim E(\lambda_1) = 1, \exists \mathcal{B}'(v_1, v_2, v_3) \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} v_3 \in E - \ker(A - \lambda_1 I_3)^2 \\ v_2 = (A - \lambda I_3)v_3 \\ v_1 = (A - \lambda I_3)v_2 \end{array} \right.$$

$$\text{tel que } J_3(\lambda_1) = \left( \begin{array}{ccc} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{array} \right) = P^{-1}AP \text{ et } Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^3.$$

Tableau de Young

$$E = \ker(A - \lambda_1 I_3)^3 = \ker(A - \lambda_1 I_3)^2 \oplus F_2$$

$$\ker(A - \lambda_1 I_3)^2 = E(\lambda_1) \oplus F_1$$

$F_2$	$v_3$
$F_1$	$v_2$
$E(\lambda_1)$	$v_1$



Si  $\dim E(\lambda_1) = 2$ , il existe  $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$  avec

$$\begin{cases} v_3 \notin v_3 E(\lambda_1) \\ v_2 = (A - \lambda_1 I_3)v_3 \\ v_1 = (A - \lambda_1 I_3)v_2 \end{cases}$$

tel que  $J_3(\lambda_1) = \left( \begin{array}{c|cc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{array} \right) = P^{-1}AP$

Tableau de Young

$$E = \ker(A - \lambda_1 I_3)^2 = E(\lambda_1) \oplus F_1$$

$$\begin{array}{c} F_1 \\ E(\lambda_1) \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline v_3 & \\ \hline v_2 & v_1 \\ \hline \end{array}$$

### Remarque 2.2

Deux matrices, dont les polynôme caractéristique soit scindé soit semblable si, et seulement si, elles ont la même réduite de Jordan.

### Exemple 2.4

$$A \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad P(\lambda) = \lambda^4, \quad Q(\lambda) = \lambda^2, \quad \dim E(0) = 2$$

$$B \sim \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad P(\lambda) = \lambda^4, \quad Q(\lambda) = \lambda^3, \quad \dim E(0) = 2$$

on voit bien que  $A$  n'est pas semblable  $B$ .

## 2.2 Tableaux de Young

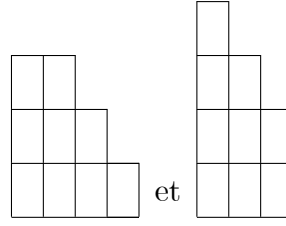
### Définition 2.2

Une partition  $\lambda$  de  $n$  est une suite  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ , la suite des  $\lambda_i$  étant décroissante. Si  $\lambda$  est une partition de  $n$ , on note alors  $\lambda \vdash n$ .

### Définition 2.3

Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash n$ . Le tableau de Young de forme  $\lambda$ , est un tableau de cases constitué de  $l$  lignes alignées à gauche, la ligne  $i$  contenant  $\lambda_i$  cases. Le tableau

de Young de forme  $\lambda^{-1}$  est celui obtenu en transposant le tableau de forme  $\lambda$ . Par exemple, les tableaux de Young de  $\lambda = (3, 3, 2, 1)$  et  $\lambda^{-1}$  sont respectivement :



Ainsi,  $\lambda^{-1} = (4, 3, 2)$ .

#### Définition 2.4

Soit  $A$  une matrice nilpotente et  $(x_i)$  la suite associée aux noyaux itérés définie cidessus. Le tableau de Young associé à  $A$ , noté  $Y(A)$ , est le tableau de Young de forme  $(x_1, \dots, x_k)^{-1}$ . En d'autres termes, pour obtenir le tableau de Young associé à  $A$ , il suffit de reporter les sauts de dimension successifs de la suite des noyaux itérés suivant les colonnes du tableau : autrement dit, le nombre de cases de la  $i$ -ième colonne du tableau sera égal au saut de dimension entre  $\ker A^{i-1}$  et  $\ker A^i$ , c'est-à-dire égal à  $\dim \ker A^i - \dim \ker A^{i-1}$ . Il est fondamental de voir que par construction, le nombre de cases de la première ligne de  $Y(A)$  est égal à l'indice de nilpotence de  $A$ .

#### Définition 2.5

Le tableau de Young associé à la suite finie d'entiers strictement positifs  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r$  est un tableau à  $r$  lignes (alignées à gauche), la première comptant  $\lambda_1$  cases, la deuxième  $\lambda_2$  cases, ..., la dernière  $\lambda_r$  cases. On le note  $\text{TY}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ .

▷ Le tableau de Young conjugué à  $\text{TY}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  est le tableau de Young  $\text{TY}(\mu_1, \dots, \mu_p)$ , où  $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_p$  sont les longueurs des colonnes de  $\text{TY}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ . On le note  $\text{TY}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)^*$ .

▷ Le tableau de Young d'un endomorphisme nilpotent  $f$  est le tableau  $\text{TY}(d_1, \dots, d_r)$ , où  $d_1 \geq \dots \geq d_r$  sont les entiers associés à  $f$  ou de manière équivalente le tableau  $\text{TY}(\delta_1, \dots, \delta_p)^*$  où les entiers  $\delta_1 \geq \dots \geq \delta_p > 0$  sont les valeurs distinctes non nulles de la suite décroissante  $(\dim \ker f^{k+1} - \dim \ker f^k)_k$ .

### Exemples 2.5

Le tableau de Young à une seule colonne



correspond à classe de similitude de la matrice nulle (ici  $0_9$ ).

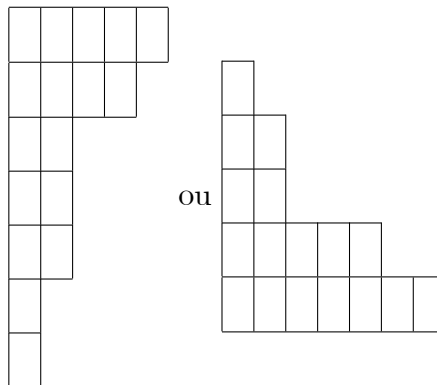
▷ Le tableau de Young à une seule ligne



correspond à la classe de similitude d'un bloc de Jordan (ici  $J_9$ ).

### Exemple 2.6

Soit  $N \in \mathcal{M}_{17}(\mathbb{K})$  tel que  $\dim \ker N = 7$ ,  $\dim \ker N^2 = 12$ ,  $\dim \ker N^3 = 14$ ,  $\dim \ker N^4 = 16$  et  $\dim \ker N^5 = 17$ . Son tableau de Young est alors



Par transitivité de la relation de similitude et l'unicité de la réduction de Jordan, on obtient la caractérisation suivante des classes de similitude.

### 2.2.1 Lire un tableau de Young

On peut lire énormément d'informations sur le tableau de Young d'un endomorphisme nilpotent  $f$ .

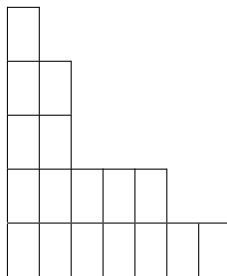
▷ Par construction, le nombre de lignes (c'est-à-dire le nombre de cases de la première colonne puisque la suite des colonnes est décroissante en taille) est la dimension du noyau de  $f$  : en effet, la première colonne correspond à la base du noyau dans la base correspondant à la réduction de Jordan. Autrement dit, le rang d'un endomorphisme nilpotent  $f$  est le nombre de cases du tableau privé de sa première colonne. Ainsi, deux endomorphismes nilpotents d'un même espace vectoriel qui ont des tableaux de Young avec le même nombre de lignes ont le même rang.

▷ De même, le nombre de cases des  $j$  premières colonnes est la dimension du noyau de  $f^j$ . Ainsi, deux endomorphismes nilpotents d'un même espace vectoriel ont les mêmes tableaux de Young si, et seulement si, toutes leurs puissances ont les mêmes rangs.

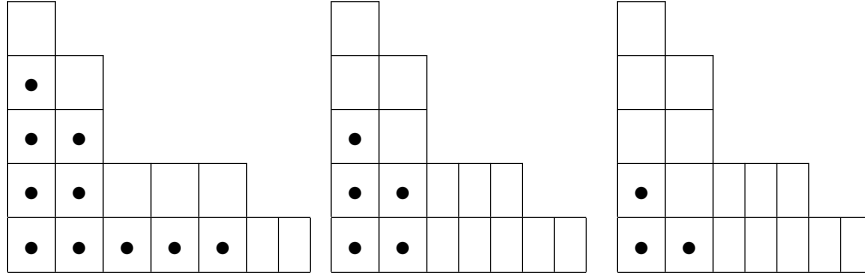
▷ On sait désormais obtenir la dimension des sous-espaces  $\text{im } f^j$ . On peut faire mieux en « localisant » ces sous-espaces sur le tableau de Young à l'aide de la preuve du théorème de réduction : pour obtenir  $\text{im } f^k$ , il suffit de rogner les  $k$  dernières cases de chaque ligne du tableau. De même, le tableau de Young de la restriction de  $f$  à  $\text{im } f^k$ , est simplement le tableau de Young de  $f$  privé de sa première colonne.

#### Exemple 2.7

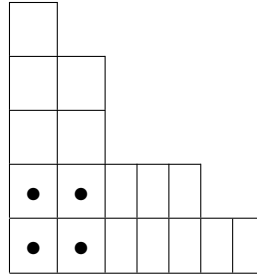
Par exemple, pour l'endomorphisme nilpotent de l'exemple précédent dont le tableau de Young est



les sous-espaces  $\text{im } f$ ,  $\text{im } f^2$  et  $\text{im } f^3$  sont indiqués ci-dessous (avec le symbole  $\bullet$ )



Le sous-espace  $\text{im } f^2 \cap \ker f^2$  est par ailleurs localisé



donc est de dimension 4.

▷ Le nombre de colonnes est la taille du plus « gros » bloc de Jordan donc l'indice de nilpotence, soit encore le degré du polynôme minimal.

## 2.3 Étude du cas particulier des matrices nilpotentes

Nous montrons les liens intimes entre la réduction de Jordan, les tableaux de Young et la notion de similitude entre les matrices. Partons de deux exemples de relations d'équivalence définies sur les matrices :

$$A \overset{r}{\equiv} B \iff \text{il existe } P, Q \text{ inversibles telles que } A = PBQ,$$

$$A \overset{pg}{\equiv} B \iff \text{il existe } P \text{ inversible telle que } A = PB.$$

La première relation d'équivalence s'appelle la  $r$ -équivalence ; nous savons que  $A$  et  $B$  sont  $r$ -équivalentes si, et seulement si,  $A$  et  $B$  ont même rang. D'autre part, nous pouvons dire une chose similaire sur la deuxième relation d'équivalence :  $A$  et  $B$  sont

$pg$ -équivalentes si, et seulement si, le noyau de  $A$  et le noyau de  $B$  sont les mêmes. Autrement dit :

$$\begin{aligned} A \stackrel{r}{\equiv} B &\iff rgA = rgB, \\ A \stackrel{pg}{\equiv} B &\iff \ker A = \ker B. \end{aligned}$$

Nous avons donc transformé ces relations d'équivalence en « négalités » : nous les avons en quelque sorte caractérisés. Une autre relation d'équivalence fondamentale sur les matrices est la notion de similitude. Nous la définissons de la manière suivante :

$$A \sim B \iff \text{il existe } P \text{ inversible telle que } A = PBP^{-1}.$$

On dit alors que  $A$  et  $B$  sont semblables. Nous proposons une méthode qui va transformer la relation de similitude en une « égalité » par le truchement de la réduction de Jordan. Dans toute la suite, nous prendrons pour corps de base des espaces vectoriels le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$ , qui possède le bon goût d'être infini et algébriquement clos.

### 2.3.1 Suite des noyaux itérés

Cette étude est fondée sur la suite des noyaux itérés. Étant donnée une matrice nilpotente  $A$  de taille  $n \times n$ , considérons la suite des noyaux :

$\{0\} \subseteq \ker A \subseteq \dots \subseteq \ker A^k = \mathbb{K}^n$ . L'existence d'un entier  $k$  tel que  $\ker A^k = \mathbb{K}^n$  est assurée par le fait que  $A$  soit nilpotente. On confondra  $A$  et l'endomorphisme représenté par  $A$  dans la base canonique. Pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , on pose  $x_i = \dim(\ker A^i) - \dim(\ker A^{i-1})$ .

#### Proposition 2.1

*La suite  $(x_i)$  est décroissante.*

#### Preuve.

L'idée est d'interpréter  $x_i$  comme la dimension d'un espace vectoriel quotient. Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels. On définit l'espace quotient  $E/F$  par l'espace vectoriel quotient résultant de la relation d'équivalence : pour tous

$$x, y \in E, x \mathcal{R} y \iff x - y \in F.$$

Il est connu que  $E/F = \dim E - \dim F$ . Par conséquent, pour que  $x_{i+1} \leq x_i$ , il suffit que de prouver que :  $\dim \ker A^{i+1} / \ker A^i \leq \dim \ker A^i / \ker A^{i-1}$ . Il suffit donc de trouver une injection linéaire de  $\dim \ker A^{i+1} / \ker A^i$  dans  $\dim \ker A^i / \ker A^{i-1}$ . Plus précisément, en notant  $\bar{x}$  la classe de  $x$ , on définit l'injection de Frobenius :

$$\begin{aligned} \Phi : \ker A^{i+1} / \ker A^i &\longrightarrow \ker A^i / \ker A^{i-1} \\ \bar{x} &\longmapsto \overline{A(x)} \end{aligned}$$

Il est facile de voir que  $\Phi$  est linéaire et que si  $x \in \ker A^{i+1}$ , alors  $A(x) \in \ker A^i$ . Montrons ensuite que le noyau de  $\Phi$  est réduit à  $\{0\}$  : soit  $x$  tel que  $\overline{A(x)} = \bar{0}$ . Les équivalences suivantes sont alors vérifiées :

$$\overline{A(x)} = \bar{0} \iff A(x) \in \ker A \iff A^i(x) = 0 \iff x \in \ker A^i \iff \bar{x} = \bar{0}.$$

$\Phi$  est donc injective, ce qui achève la démonstration. ■

## Définition 2.6

Soient  $A$  et  $B$  sont deux matrices carrées. La matrice par blocs  $X$  définie par :  $X = \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$  est appelée somme directe de  $A$  et de  $B$ . On note  $X = A \oplus B$ . La réduction de Jordan est fondée sur le théorème suivant.

## Théorème 2.2

Soit  $A$  une matrice nilpotente de taille  $n$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$  la forme de  $Y(A)$ . Alors :  $A \sim \bigoplus_i J_{\lambda_i}$ . Par exemple, si  $Y(A) = (3, 3, 2, 1)$ , alors la proposition affirme

$$\text{que : } A \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & & 0 & & 0 & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & & 0 & 0 & \\ & 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & & 0 & \\ & 0 & 0 & \boxed{0} & & \\ & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & \end{pmatrix}.$$

**Preuve.**

Nous faisons une preuve par l'exemple pour éviter les triples indices. Supposons que  $Y(A)$  soit de la forme  $\lambda = (6, 4, 4, 1)$ . L'idée est d'inscrire des vecteurs dans les cases du tableau de Young pour qu'au final nous retrouvions avec la bonne base de l'espace. Nous complétons les cases ligne par ligne en partant de la droite de sorte que les éléments de la  $i$ -ième colonne forment une base de  $\ker A^i / \ker A^{i-1}$ . D'après la forme du tableau, l'indice de nilpotence de  $A$  est 6. choisissons donc un vecteur  $v_1$  de  $\mathbb{C}^6$  tel que  $A^5(v_1) \neq 0$ . Plaçons ensuite  $v_1$  dans la dernière case de la première ligne de  $Y(A)$  et remplissons la par  $A(v_1), A^2(v_1), \dots, A^5(v_1)$  pour obtenir :

$v_1$			
$A(v_1)$			
$A^2(v_1)$			
$A^3(v_1)$			
$A^4(v_1)$			
$A^5(v_1)$			

Comme  $A(v_1) \in \ker A^4 / \ker A^3$ , complétons le par  $v_2, v_3$  pour obtenir une base de  $\ker A^4 / \ker A^3$ , qui est bien de dimension 3 d'après la forme du tableau de Young. On place  $v_2$  en bout de deuxième ligne,  $v_3$  en bout de la troisième et on remplit comme précédemment. Il est impératif de voir que  $A^3(v_1), A(v_2), A(v_3)$  est également libre dans  $\ker A^3 / \ker A^2$  du fait de l'injection de Frobenius exposée ci-dessus. choisissons finalement un  $v_4$  tel que  $(A^5(v_1), A^3(v_2), A^3(v_3), v_4)$  forme une base de  $\ker A$ . En définitive :

$v_1$			
$A(v_1)$			
$A^2(v_1)$	$v_2$	$v_3$	
$A^3(v_1)$	$A(v_2)$	$A(v_3)$	
$A^4(v_1)$	$A^2(v_2)$	$A^2(v_3)$	
$A^5(v_1)$	$A^3(v_2)$	$A^3(v_3)$	$v_4$

L'injection de Frobenius nous assure que

$\mathcal{B} = (A^5(v_1), A^4(v_1), \dots, v_1, A^3(v_2), \dots, v_2, A^3(v_3), \dots, v_3, v_4)$  est une base de  $\mathbb{C}^{15}$ .

Alors, par construction, dans cette base :  $Mat_{\mathcal{B}} A = \bigoplus_i J_{\lambda_i}$ , et le résultat s'en suit.

■



### 2.3.2 Propriétés utiles des $Y(A)$

Nous sommes dorénavant en mesure d'exhiber toute la puissance des tableaux de Young sous forme d'une liste de propriétés.

#### **Théorème 2.3**

*Soit  $A$  une matrice nilpotente de taille  $n$  et  $T = Y(A)$  de forme  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ . Alors les points suivants sont vérifiés :*

1.  $\lambda_1$  est l'indice de nilpotence de  $A$ ,
2. le nombre de cases constituant les  $i$  premières colonnes est la dimension de  $\ker A^i$ ,
3. le rang de  $A^i$  est le nombre de cases du tableau de Young obtenu en supprimant les  $i$  premières colonnes de  $T$ .

#### **Preuve.**

C'est quasiment immédiat d'après ce qui a été dit précédemment.

1. Nous l'avons déjà vu : par construction,  $\lambda_1$  est le nombre d'espaces vectoriels distincts de  $\mathbb{k}^n$  apparaissant dans la suite des noyaux itérés. C'est aussi la taille du plus grand bloc de Jordan apparaissant dans  $\oplus_i J_{\lambda_i}$ .
2. C'est clair par construction.
3. C'est clair d'après le théorème du rang puisque  $T$  possède  $n$  cases.

■

## 2.4 Cas général de la réduction de Jordan

Elle s'énonce ainsi, en prenant pour  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie :

#### **Théorème 2.4** (*Réduction de Jordan d'un endomorphisme*)

*Soit  $A$  une matrice et  $P(\lambda)$  son polynôme caractéristique qui se factorise sous la forme :  $P(\lambda) = \prod_{i=1}^s (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i}$ , ( $\lambda_i \neq \lambda_j$  si  $i \neq j$ ). Alors il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle*

que la matrice de  $f$  dans cette base soit de la forme :  $Mat_{\mathcal{B}}f = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s \end{pmatrix}$ ,  
avec pour tout  $i$ , la matrice  $A_i$  s'écrivant comme somme directe de blocs de Jordan qui ont  $\lambda_i$  sur la grande diagonale.

**Preuve.**

Il s'agit de se ramener au cas nilpotent. Pour tout  $i$ , on note  $N_i = \ker(f - \lambda_i Id)^{\alpha_i}$  les sous-espaces caractéristiques de  $f$ . D'après le lemme des noyaux, on a  $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_s$  et les  $N_i$  sont stables par  $f$ . Pour tout  $i$ , on pose  $f_i = f|_{N_i}$ . On a  $f_i \in \mathcal{L}$  et  $(f_i - \lambda_i Id)^{\alpha_i} = 0$ . Par suite  $n_i = f_i - \lambda_i Id$  est nilpotent. Pour tout  $i$ , on applique la réduction de Jordan à l'endomorphisme nilpotent  $n_i$ . Il suffit ensuite de réunir les bases utilisées de chaque sous-espace caractéristique pour obtenir la base  $\mathcal{B}$  de  $E$  souhaitée. L'interprétation en termes de tableaux de Young est quasiment identique : on associe à  $f$  les  $s$  tableaux de Young correspondant à chaque endomorphisme nilpotent  $n_i$  (ou de manière équivalente à chaque valeur propre). ■

## 2.5 Étude de la relation de similitude

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Les implications suivantes sont bien connues :

$$A \sim B \implies rg A = rg B$$

$$A \sim B \implies A^k = B^k$$

$$A \sim B \implies A - \lambda I_n \sim B - \lambda I_n, \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Nous allons prouver que la réciproque est vérifiée, à savoir que

$$A \sim B \iff rg(A - \lambda I_n)^k = rg(B - \lambda I_n)^k \text{ pour tous } \lambda \in \mathbb{C} \text{ et } k \in \mathbb{N}.$$

### 2.5.1 Théorème de Jordan

#### Proposition 2.2

Soient  $A, B$  deux matrices nilpotentes. Alors :  $A \sim B \iff \forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$rg(A - \lambda I_n)^k = rg(B - \lambda I_n)^k.$$

**Preuve.**

La seule valeur propre possible de  $A$  et de  $B$  est 0. Il suffit donc d'examiner le cas où  $\lambda = 0$ . Les équivalences suivantes sont vérifiées :  $\forall k \in \mathbb{N}, rg A^k = rg B^k \iff$  les sauts de dimension dans les suites respectives des noyaux itérés sont les mêmes  $\iff Y(A) = Y(B)$ . ■

**Théorème 2.5** (*Jordan-Weyr*)

*Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . L'équivalence suivante est vérifiée :*

$$A \sim B \iff \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{N}, rg(A - \lambda I_n)^k = rg(B - \lambda I_n)^k.$$

## 2.5.2 Étude des classes d'équivalence

Nous avons vu que  $A \sim B \iff Y(A) = Y(B)$  lorsque  $A$  et  $B$  sont nilpotentes. Un tableau de Young de forme  $\lambda \vdash n$  peut donc être mis en bijection avec une classe d'équivalence pour la relation de similitude. En notant  $p(n)$  le nombre de partitions de l'entier  $n$ , le nombre de tableaux de Young possible à  $n$  cases est donc  $p(n)$ .

**Proposition 2.3**

*Considérons l'ensemble des matrices nilpotentes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Le nombre de classes d'équivalences pour la relation de similitude sur cet ensemble est alors  $p(n)$ . Plus généralement, d'après la remarque qui suit la preuve du théorème.*

**Théorème 2.6**

*Considérons l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  qui possèdent le même polynôme caractéristique :  $P(\lambda) = \prod_{i=1}^s (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i}$ , ( $\lambda_i \neq \lambda_j$  si  $i \neq j$ ). Le nombre de classes d'équivalences pour la relation de similitude sur cet ensemble est alors  $\prod_{i=1}^s p(s)$ .*

**Exemple 2.8**

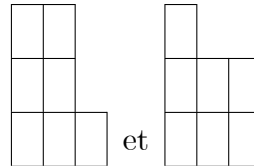
$$A \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{0 & 1 & 0} & & & & \\ \boxed{0 & 0 & 1} & & & 0 & 0 \\ \boxed{0 & 0 & 0} & & & & \\ & & & \boxed{0 & 1 & 0} & \\ & & & 0 & \boxed{0 & 0 & 1} & 0 \\ & & & & \boxed{0 & 0 & 0} & \\ & 0 & & & & & \boxed{0} \\ & & & & & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ et } B \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{0 & 1 & 0} & & & & \\ \boxed{0 & 0 & 1} & & & 0 & 0 \\ \boxed{0 & 0 & 0} & & & & \\ & & & \boxed{0 & 1} & & \\ & & 0 & \boxed{0 & 0} & & 0 \\ & & & & & & \boxed{0 & 1} \\ & 0 & & 0 & & & \boxed{0 & 0} \end{array} \right)$$

les conditions sont vérifiées, mais  $A$  n'est pas semblable à  $B$  car  $rg A^2 = 2$  et  $rg B^2 = 1$ .

Contrairement aux apparences, cela n'est pas sorti du chapeau. L'implication :

$$A \sim B \iff \begin{cases} rg A = rg B = 4 \\ P_A(\lambda) = P_B(\lambda) \\ Q_A(\lambda) = Q_B(\lambda) \end{cases}$$

annonce en effet que si  $A, B$  sont nilpotentes et si  $Y(A)$  et  $Y(B)$  ont le même nombre de cases sur la première ligne et sur la première colonne, alors  $A = B$ . Cela est clairement faux comme le montrent les deux tableaux suivants à partir desquels  $A$  et  $B$  ont été construits :



Remarquons que si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  avec  $n \leq 6$ , alors le résultat est vrai.

## 2.6 Pratique de la réduction de Jordan

Soit  $A \in M_n(\mathbb{k})$  matrice de  $u$  dans une base  $B$ .

1. On calcule  $P(\lambda)$  et on s'assure qu'il est scindé sur  $\mathbb{k}$  :

$$P(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{n_s} \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{k}.$$

2. On détermine  $Q(\lambda)$  dont on sait qu'il est de la forme :

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s} \text{ avec } 1 \leq m_i \leq n_i \text{ en utilisant le résultat suivant :}$$

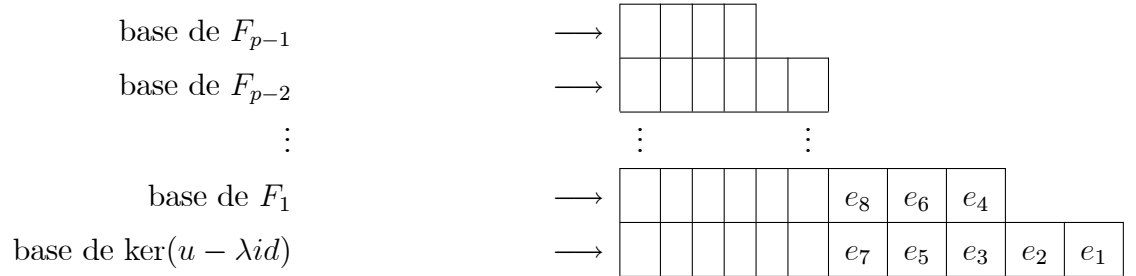
$\{0\}$	$\subsetneq$	$\ker(A - \lambda_i I_n)$	$\subsetneq$	$\ker(A - \lambda_i I_n)^2$	$\dots$	$\ker(A - \lambda_i I_n)^{m_i}$	$=$	$\dots$	$\ker(A - \lambda_i I_n)^{n_i}$
0	$<$	$d_1$	$<$	$d_2$	$\dots$	$d_{m_i} = n_i$	$=$	$\dots$	$n_i$

Il suffit donc, par exemple, d'étudier les rangs des puissances de  $(A - \lambda_i I_n)$ . Les calculs sont diminués si on se souvient que la suite  $(d_r)_r$  s'essoufle, c'est-à-dire que la suite  $(d_{r+1} - d_r)_r$  décroît au sens large.

3. On rappelle qu'il existe une suite de s.e.v de  $V^{m_i}(\lambda_i) : F_1, \dots, F_{m_i-1}$  tels que :

$$\begin{cases} V^{m_i}(\lambda_i) = V^{m_i-1}(\lambda_i) \oplus F_{m_i-1} \\ V^{m_i-1}(\lambda_i) = V^{m_i-2}(\lambda_i) \oplus F_{m_i-2} \\ \vdots \\ V^2(\lambda_i) = V(\lambda_i) \oplus F_1 \end{cases}$$

4. On dessine ensuite un tableau de Young à  $m_i$  étages et  $n_i$  vecteurs pour chaque valeur propre  $\lambda_i$ , en plaçant  $d_1$  vecteurs au rez-de-chaussée,  $d_2 - d_1$  au 1<sup>er</sup> étage,  $\dots, d_{m_i} - d_{m_i-1}$  dans la dernière étage en les numérotant comme suit :



On passe d'une ligne à la ligne du dessous en appliquant  $u - \lambda id_E$ .

5. Une cellule de Jordan est une matrice de la forme :

$$J_k(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{K}).$$

Chaque colonne du tableau de Young correspond à une telle cellule de taille la hauteur de la colonne. Le bloc de Jordan correspondant à la valeur propre  $\lambda_i$  sera donc (le nombre de blocs est égal au cardinal du rez-de-chaussée) :

$$J(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \boxed{J_{h_1}(\lambda_i)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{J_{h_2}(\lambda_i)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{J_{h_k}(\lambda_i)} \end{pmatrix}$$

6. Enfin il ne reste plus qu'à "empiler" les blocs et la réduite de Jordan de  $A$  est :

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J(\lambda_1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{J(\lambda_2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{J(\lambda_s)} \end{pmatrix}$$

7. Si on veut une matrice de passage il faut construire une base pour chaque s.e.v caractéristique  $\ker(A - \lambda_i I)^{m_i}$  en commençant par les vecteurs de l'étage le plus élevé : ils doivent engendrer un supplémentaire de  $\ker(A - \lambda_i I)^{m_i-1}$  dans  $\ker(A - \lambda_i I)^{m_i}$ . Leur image par  $A - \lambda_i I$  est une famille libre de  $\ker(A - \lambda_i I)^{m_i-1} \setminus \ker(A - \lambda_i I)^{m_i-2}$ , on la complète-éventuellement-en base d'un supplémentaire de  $\ker(A - \lambda_i I)^{m_i-2}$  dans  $\ker(A - \lambda_i I)^{m_i-1}$  et on recommence. Les vecteurs du rez-de-chaussé forment une base du s.e.v propre  $\ker(A - \lambda_i I)$ . On numérote ensuite les vecteurs de bas en haut et de droite à gauche. On répète cette opération pour toutes les valeurs propres et on rang dans  $P$  matrice de passage les vecteurs dans le bon ordre et-selon l'usage-dans l'ordre décroissant des valeurs propres. On a alors  $A = PJP^{-1}$ .

8. Pour voir si vous avez saisi traitez complètement l'exemple suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On trouve  $P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^5$ .  $\dim \ker(A + I) = 1$  et une base en est  $\varepsilon_1 = (1, 1, 1, 1, 0, 0)$ . Pour la valeur propre 2 :  $\dim \ker(A + 2I) = 3$  et

$\dim \ker(A + 2I)^2 = 5$  donc 2 est racine double de  $Q(\lambda)$  et  $Q(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2$ . On

peut dessiner le tableau de Young pour la valeur propre 2 :

$\varepsilon_6$	$\varepsilon_4$	
$\varepsilon_5$	$\varepsilon_3$	$\varepsilon_2$

qui donnera un bloc  $\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$ , (la valeur propre  $-1$  donne un bloc

$(-1) \dots$ ). L'équation de  $\ker(A - 2I)^2$  est  $x_3 = x_6$  et celles de  $\ker(A - 2I)$  sont :

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_5 = x_1 - x_2 \\ x_6 = 0 \end{cases}$$

On prend pour base d'un supplémentaire de  $\ker(A - 2I)$  dans  $\ker(A - 2I)^2$  les vecteurs  $\varepsilon_4 = (0, 0, 1, 0, 0, 1)$  et  $\varepsilon_6 = (0, 0, 1, 0, -1, 1)$  et on vérifie que :

$\alpha\varepsilon_4 + \beta\varepsilon_6 \in \ker(A - 2I)$  ssi  $\alpha = \beta = 0$  donc ils engendrent bien un supplémentaire de  $\ker(A - 2I)$  dans  $\ker(A - 2I)^2$ . Ensuite on calcule  $\varepsilon_3 = (A - 2I)\varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$  et  $\varepsilon_5 = (A - 2I)\varepsilon_6 = (1, 0, 0, 0, 1, 0)$ . Enfin on complète cette famille en base de  $\ker(A - 2I)$  par  $\varepsilon_2 = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$ .

## 2.7 Dimensions des orbites :

le calcul de la dimension d'une orbite se fait de façon simple et sera justifié la par la suite : l'orbite maximale est de dimension  $n^2 - n$  on obtient la dimension d'une orbite à partir de celle placée immédiatement plus haut en retranchant à la dimension de cette dernière deux fois le nombre de chutes qu'on a fait effectuer au citations.

Ainsi l'orbite qui suit l'orbite maximale est toujours de dimension  $n^2 - n - 2$ , et celle qui est au-dessus de l'orbite de dimension nulle, et qui correspond aux matrices nilpotentes de rang un, est de dimension  $2(n - 1)$ .

Evidemment, ce processus ne permet pas de calculer la dimension d'une orbite sans avoir à construire le graphe de toutes celles qui lui sont supérieures ou inférieures ; c'est pour cela qu'il vaut mieux garder en mémoire la formule suivante :

$$\dim p_N = n^2 - \sum \hat{p}_i^2 = 2 \sum n_{i+1}(n_i - n_{n+1}).$$

Où la matrice nilpotente  $N$  admet comme tableau de Young  $(p_1, \dots, p_k)$  et où  $(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_s)$  est la partition duale. Cette dimension apparaît donc comme la codimension (effectivement paire) du groupe des matrices diagonales en blocs ayant comme ordres successifs  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_s$  quant aux, ils désignent respectivement les rangs de  $A^i$  : on a bien  $\hat{p}_1 = \dim \ker A = n_0 - n_1$  et  $\hat{p}_2 = \dim \ker A^2 - \dim \ker A = n_1 - n_2 \dots$

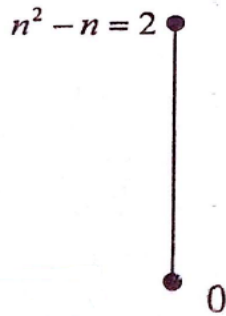
### 2.7.1 Pratique de la réduite de Jordan dans les matrices nilpotentes :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(R)$  une matrice nilpotente de polynôme caractéristique  $p(\lambda) = (-\lambda)^n$ .

1. Pour  $n = 2$

<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-right: 10px;"> <math>\begin{matrix} * \\ * \end{matrix}</math> </div> <div> <math>J_2(0) = \begin{pmatrix} 0 &amp; 1 \\ 0 &amp; 0 \end{pmatrix}</math>  <math>\dim E(0) = 1</math> </div> </div>	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="margin-right: 10px;"> <math>\begin{matrix} 2 \end{matrix}</math> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <math>\begin{matrix} * &amp; * \end{matrix}</math> </div> <div style="margin-left: 10px;"> <math>\begin{pmatrix} 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 \end{pmatrix}</math>  <math>\dim E(0) = 2</math> </div> </div>
---	--

Pour la dimension  $n = 2$ , il y a deux partitions de  $n$ , donc deux orbites de matrices nilpotentes qui sont emboîtées comme suit :

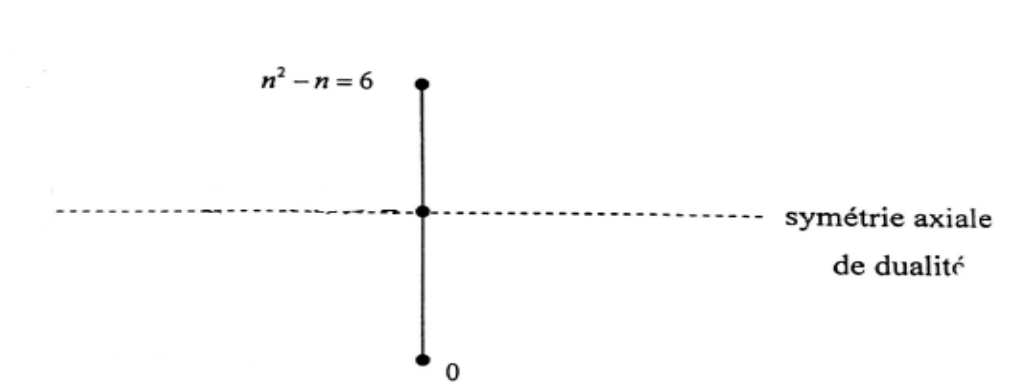




**2. Pour  $n = 3$**

$  \begin{array}{ c } \hline * \\ \hline * \\ \hline * \\ \hline \end{array}  $	$  J_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}  $	$  \begin{array}{ c c } \hline * & \\ \hline * & * \\ \hline \end{array}  $	$  \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}  $
	$\dim E(0) = 1$		$\dim E(0) = 2$
$  \begin{array}{ c c c } \hline * & * & * \\ \hline \end{array}  $	$  \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}  $		
	$\dim E(0) = 3$		

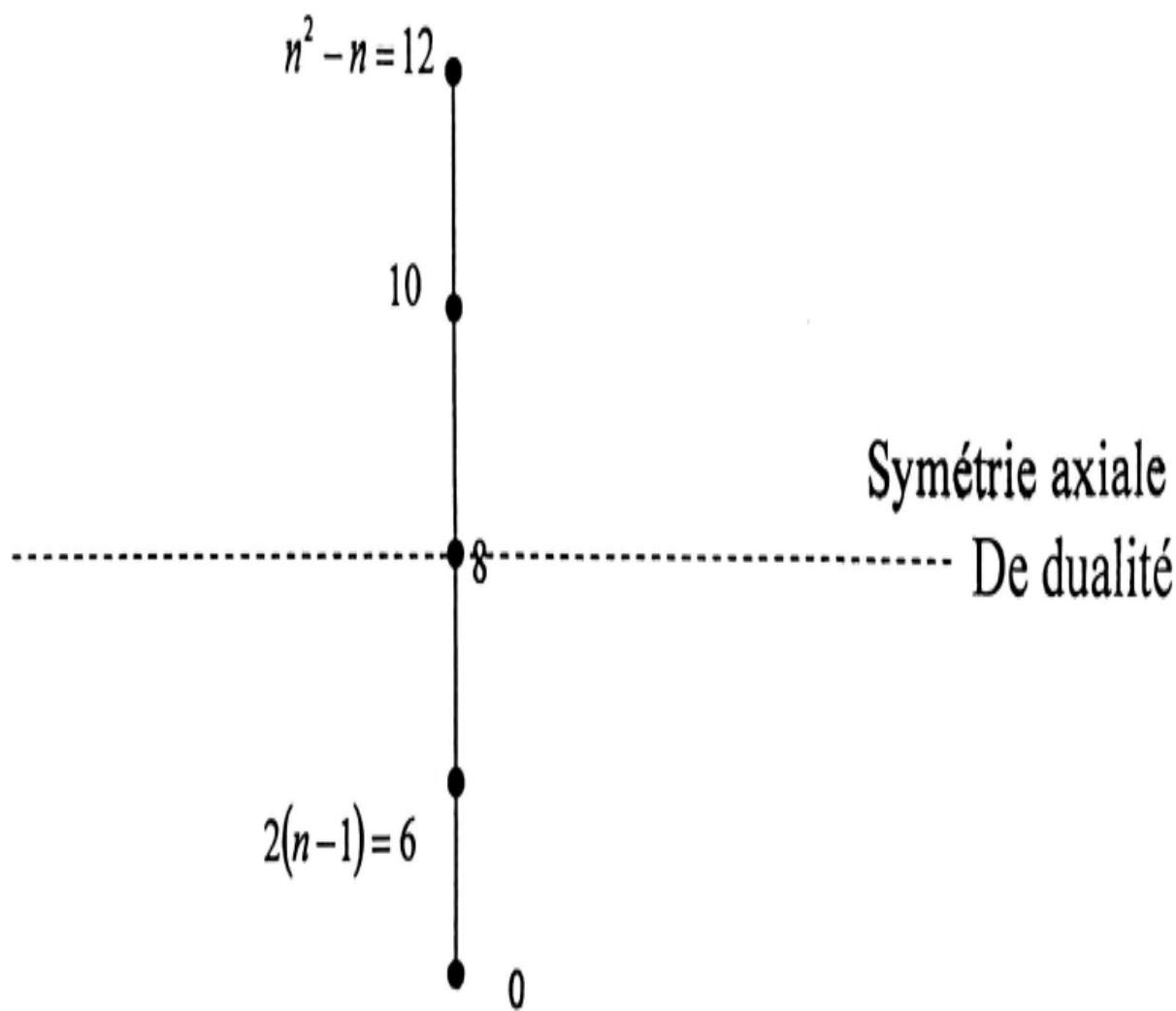
Pour la dimension  $n = 3$ , il y a trois partitions de  $n$ , donc trois orbites de matrices nilpotentes qui sont emboîtées comme suit :



**3. Pour  $n = 4$**

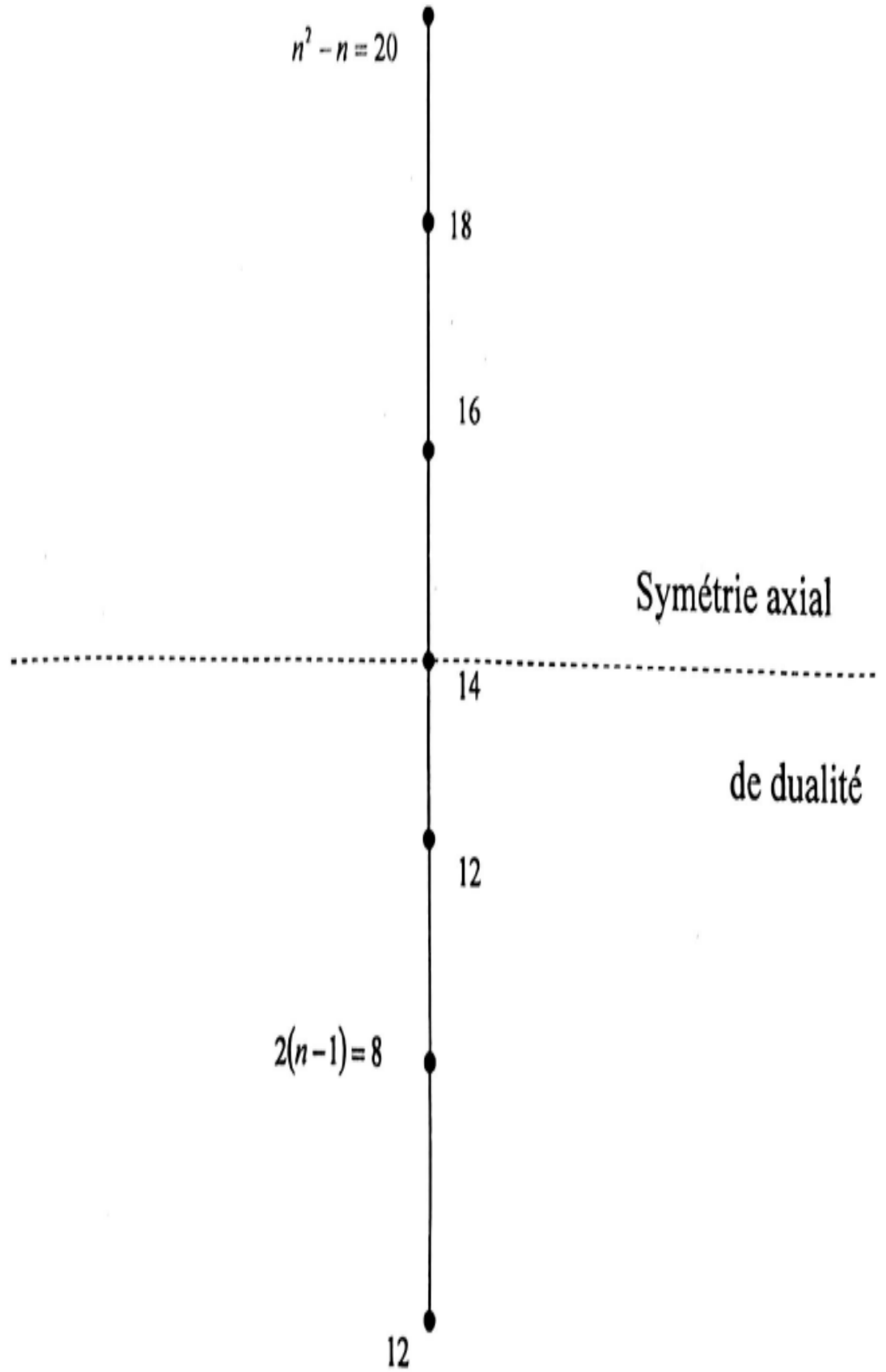
<div style="text-align: right; margin-bottom: 10px;">12</div> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-right: 20px;"> * * * * </div> <div> <math>J_4(0) = \begin{pmatrix} 0 &amp; 1 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 1 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 0 \end{pmatrix}</math> </div> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 10px;"><math>\dim E(0) = 1</math></div>	<div style="text-align: right; margin-bottom: 10px;">10</div> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-right: 20px;"> * * * </div> <div> <math>\begin{pmatrix} 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 1 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 0 \end{pmatrix}</math> </div> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 10px;"><math>\dim E(0) = 2</math></div>
<div style="text-align: right; margin-bottom: 10px;">8</div> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-right: 20px;"> * * * * </div> <div> <math>\begin{pmatrix} 0 &amp; 1 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 1 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 0 \end{pmatrix}</math> </div> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 10px;"><math>\dim E(0) = 2</math></div>	<div style="text-align: right; margin-bottom: 10px;">6</div> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-right: 20px;"> * * * * </div> <div> <math>\begin{pmatrix} 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 1 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 0 \end{pmatrix}</math> </div> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 10px;"><math>\dim E(0) = 3</math></div>
<div style="text-align: right; margin-bottom: 10px;">0</div> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-right: 20px;"> * * * * </div> <div> <math>\begin{pmatrix} 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 0 \end{pmatrix}</math> </div> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 10px;"><math>\dim E(0) = 4</math></div>	

Pour la dimension  $n = 4$ , il y a cinq partitions de  $n$ , donc cinq orbites de matrices nilpotentes qui sont emboîtées comme suit :

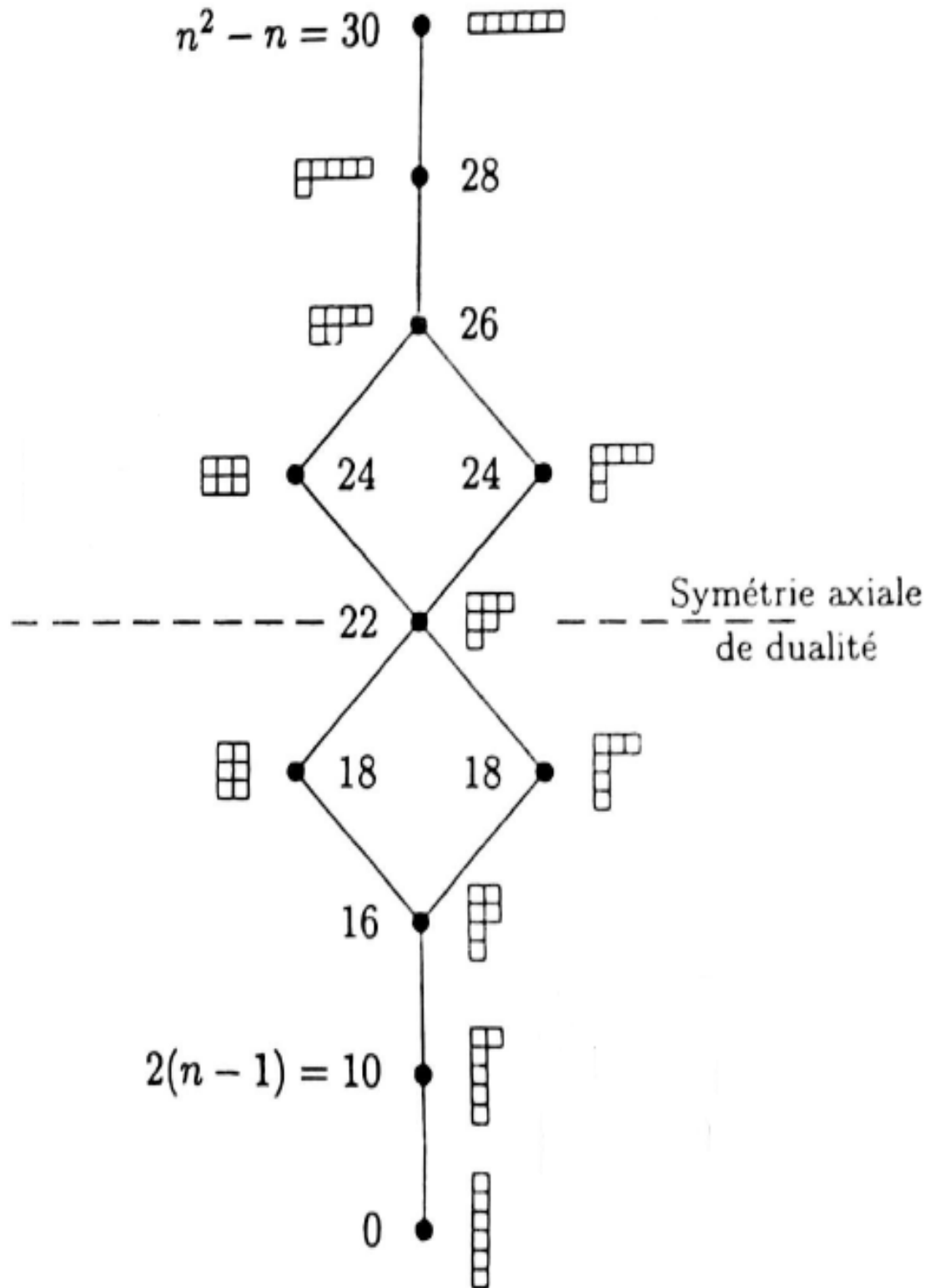


4. Pour  $n = 5$

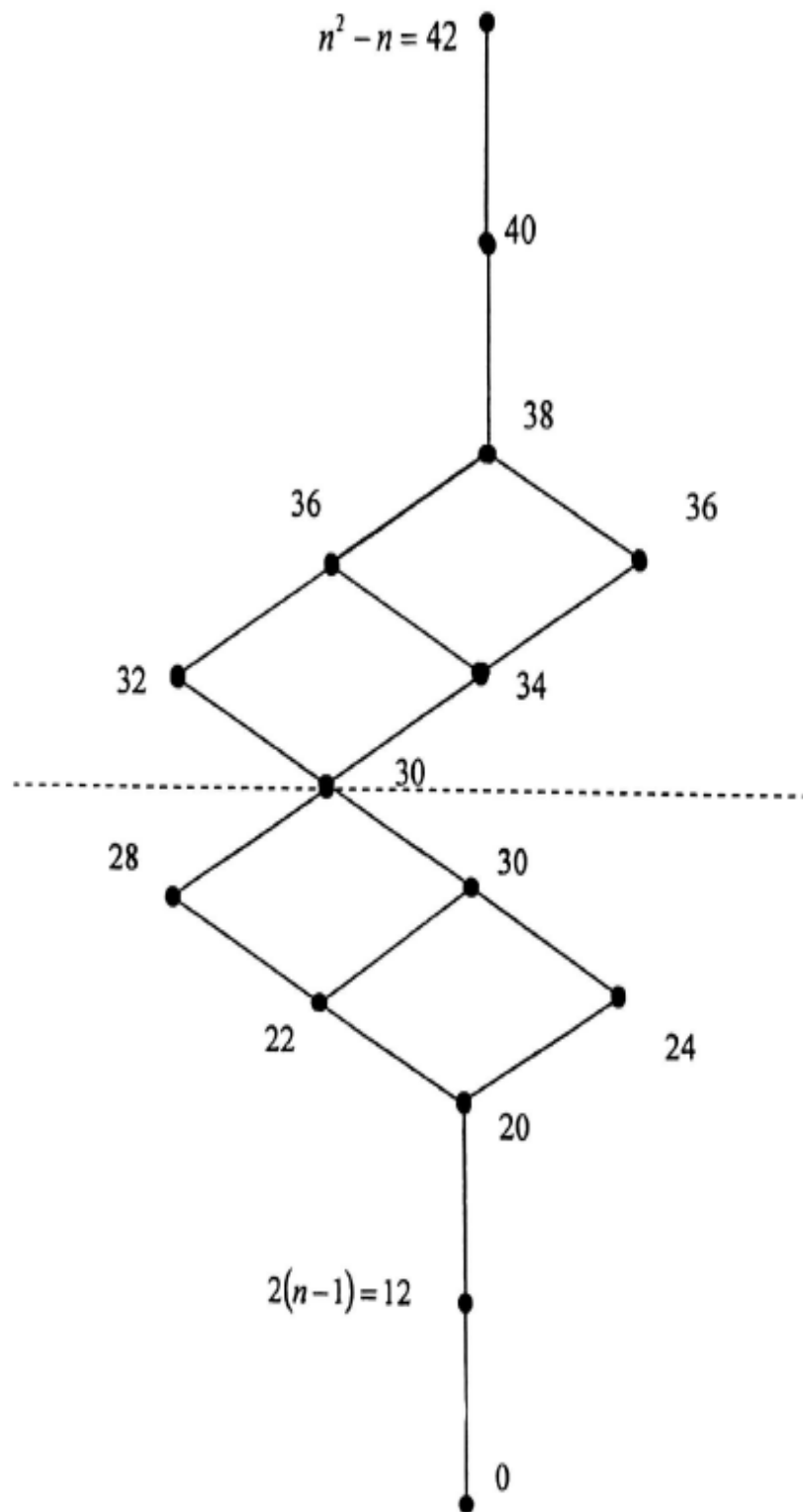
$  \begin{array}{ c } \hline * \\ \hline * \\ \hline * \\ \hline * \\ \hline * \\ \hline \end{array}  J_5(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}  $ $\dim E(0) = 1$	$  \begin{array}{ c c } \hline * & \\ \hline * & \\ \hline * & \\ \hline * & * \\ \hline \end{array}  \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}  $ $\dim E(0) = 2$
$  \begin{array}{ c c } \hline * & \\ \hline * & * \\ \hline * & * \\ \hline \end{array}  \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}  $ $\dim E(0) = 2$	$  \begin{array}{ c c c } \hline * & & \\ \hline * & & \\ \hline * & * & * \\ \hline \end{array}  \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}  $ $\dim E(0) = 3$
$  \begin{array}{ c c c } \hline * & * & \\ \hline * & * & * \\ \hline \end{array}  \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}  $ $\dim E(0) = 3$	$  \begin{array}{ c c c c } \hline * & & & \\ \hline * & * & * & * \\ \hline \end{array}  \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}  $ $\dim E(0) = 4$
$  \begin{array}{ c c c c c } \hline * & * & * & * & * \\ \hline \end{array}  \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}  $ $\dim E(0) = 5$	



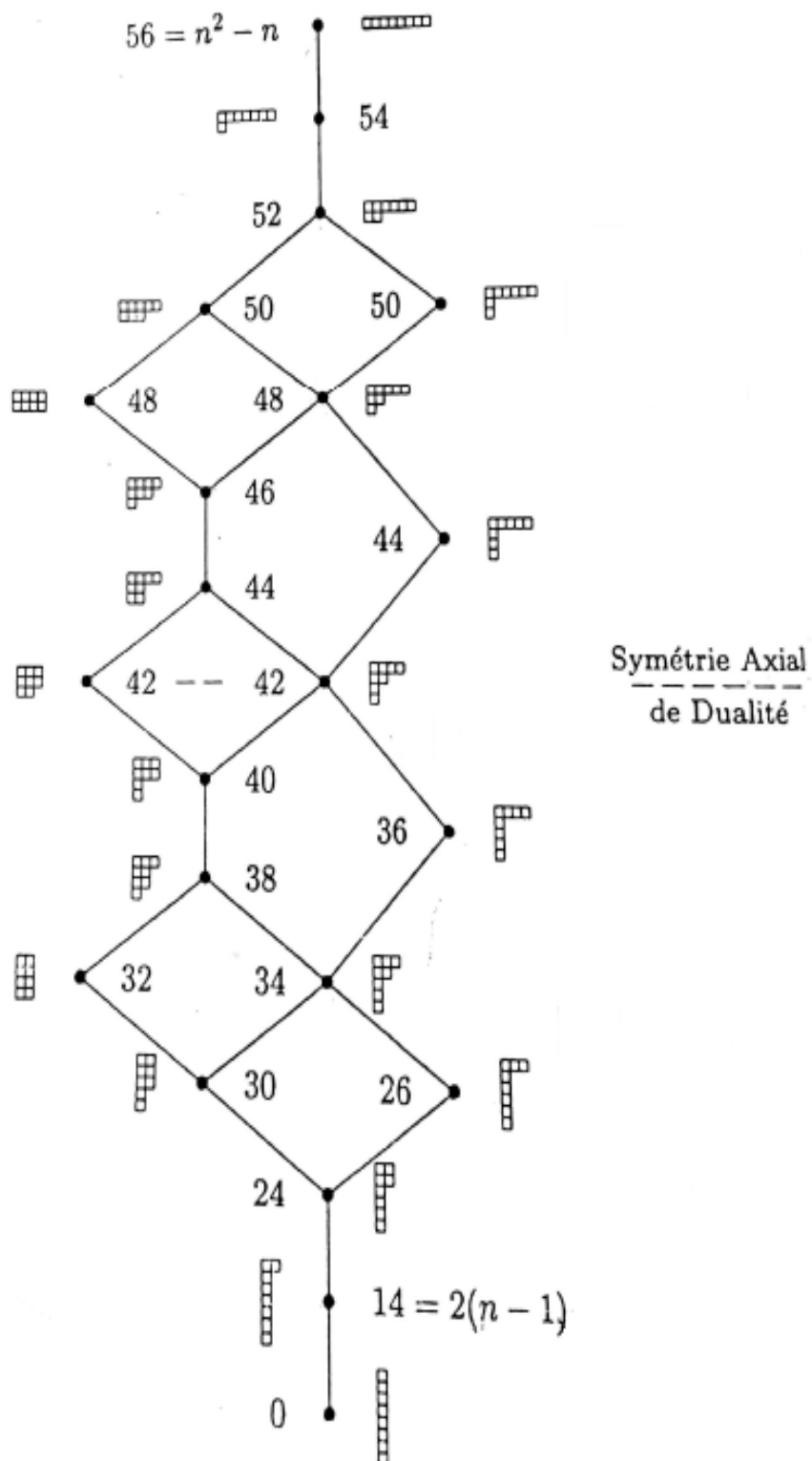
5. Pour la dimension  $n = 6$ , il y a onze partitions de  $n$ , donc onze orbites de matrices nilpotentes qui sont emboîtées comme suit :



6. Pour la dimension  $n = 7$ , il y a 15 partitions de  $n$ , donc 15 orbites de matrices nilpotentes qui sont emboîtées comme suit :

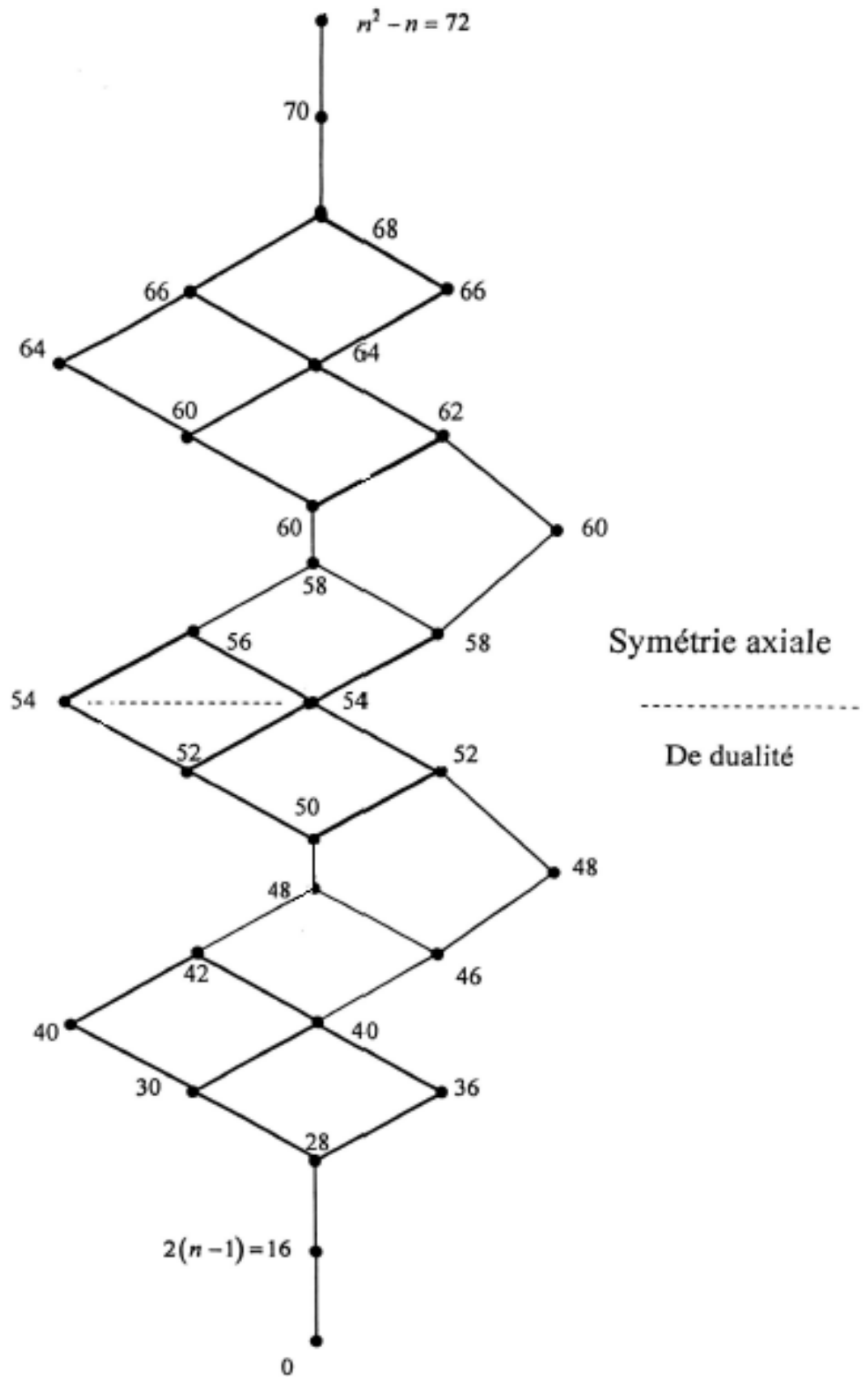


7. Pour la dimension  $n = 8$ , il y a 22 partitions de  $n$ , donc 22 orbites de matrices nilpotentes qui sont emboîtées comme suit :

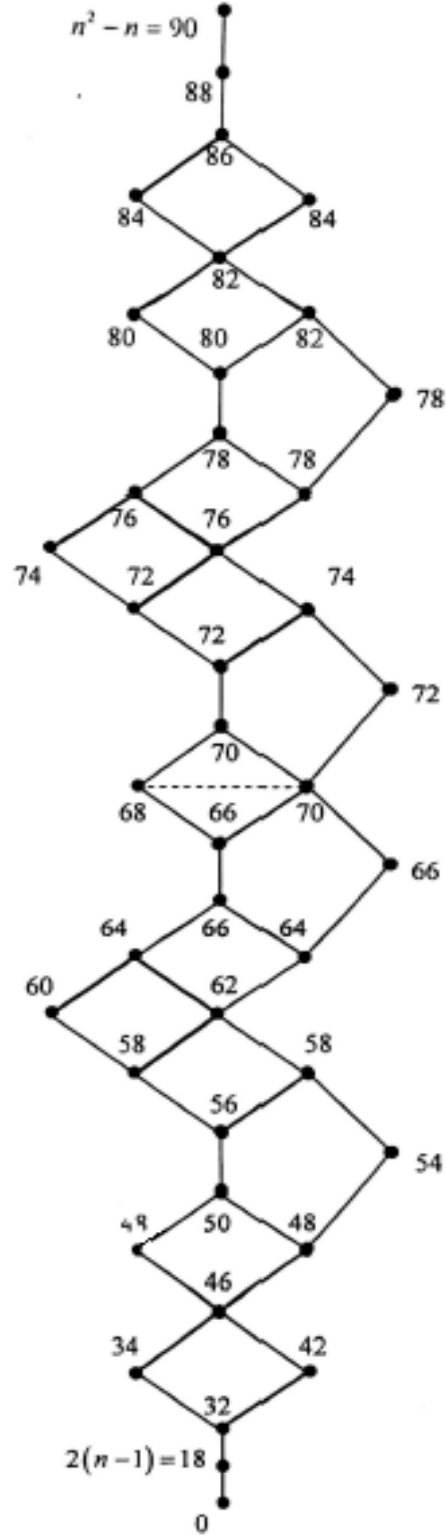




8. Pour la dimension  $n = 9$ , il y a 30 partitions de  $n$ , donc 30 orbites de matrices nilpotentes qui sont emboîtées comme suit :



9. Pour la dimension  $n = 10$ , il y a 42 partitions de  $n$ , donc 42 orbites de matrices nilpotentes qui sont emboîtées comme suit :



# Conclusion

Ce travail est consacré à la réduction des endomorphismes, en particulier la réduction de Jordan.

On utilise la réduction de Jordan pour résoudre un système différentiel, un système de suites récurrentes, calcul de la puissance d'une matrice, ect.

# Bibliographie

- [1] **O. Bokanowski**, *Diagonalisation et trigonalisation*, Algèbre et analyse fondamentales, Paris7, Septembre 2015.
- [2] **L. Brandolese & M-A. Dronne**, *Algèbre linéaire*, Cours et exercices, ISPB, Faculté de Pharmacie de Lyon, 2014-2015.
- [3] **J-P. Escofier**, *Toute l'algèbre de la licence*, Cours et exercices corrigés, 4<sup>e</sup> édition, Dunod.
- [4] **D. Étienne**, *Exercices corrigés d'algèbre linéaire tome 2*, de boeck.
- [5] **R. Goblot**, *Algèbre linéaire*, collection dirigée par Charles-Michel marle et Philippe Pilibpsian, Université de Lille 1.
- [6] **X. Gourdon**, *Algèbre*, 2<sup>ème</sup> édition, Les maths en tête, 304 pages, 2009.
- [7] **N. Jacobson**, *Basic Algebra I*, Freeman, 1985.
- [8] **J-J. Ruch**, *Algèbre2*, Cours de deuxième années de l'Université de Bordeaux.
- [9] **I. Kortchemski**, *Réduction de Jordan et tableau de Young*, Juin 2006.
- [10] **I. Kortchemski**, *Réduction de Jordan et les tableaux de Young*, notes prises lors d'un exposé de R.Mneimné, 2006.
- [11] **S. Lang**, *Algèbre*, Cours et exercices, Dunod.
- [12] **R. Mansuy & R. Mneimné**, *Algèbre linéaire*, Réduction des endomorphismes, Vuibert.
- [13] **R. Mneimné**, *Réduction des endomorphismes*, Calavage & mounet, 2006.